

## 2次元ディラトン重力理論における量子効果による 時空への反作用

著者	堀田 昌寛
学位授与機関	Tohoku University
学位授与番号	1337
URL	<a href="http://hdl.handle.net/10097/45634">http://hdl.handle.net/10097/45634</a>

# 2次元ディラトン重力理論における 量子効果による時空への反作用

東北大学理学研究科原子核理学専攻 堀田昌寛

平成5年

# 目次

1 序論	3
2 2次元ディラトン重力理論	7
2.1 一般論	7
2.2 CGHS ディラトン重力理論とブラックホール（古典論）	9
2.3 ブラックホール形成に反作用を取り入れた解析の現状	14
2.4 Reversed CGHS ディラトン重力理論	18
2.5 Reversed CGHS 理論における量子効果の反作用	21
3 Reversed CGHS 理論におけるワームホール解	27
4 ワームホールと Hawking 輻射	37
5 物質場の量子効果がワームホールに与える反作用	45
5.1 概論	45
5.2 $\kappa$ に関する摂動	48
5.3 $M$ に関する摂動	54
5.4 非摂動的解析	58
6 まとめ	65
A 補遺：Polyakov 作用の導出	67

## 1 序論

一般相対性理論から導かれる時空にはしばしば事象の地平線が存在している。それは因果的な意味での半透膜として定義される。例えば質量  $M$  をもつ 4 次元 Schwartzschild ブラックホール解では計量が

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)} + r^2 d\Omega^2 \quad (1)$$

と表せ、 $r = 2GM$  が地平線にあたる。この地平線の外にある物体は地平線の内側に入ることができる。しかしこの境界の内側にある物体がたとえ光速で外向きに走っても、有限の時間では境界の外側の領域に達することはできない。

しかし地平線があっても物質場の量子効果を考慮するとブラックホールからエネルギーを汲みだすことが可能になる。これは 1975 年に Hawking によって指摘された事である [1]。彼はブラックホール形成を記述する時空において量子化された自由場の解析をおこない、地平線から一定の熱的なフラックスが放射されつづけることを示した。地平線近傍での真空分極における virtual な粒子が重力場によって励起された結果である。放射のエネルギー Spektrum は Planck 分布をしており、そこに現われる温度は Hawking 温度と呼ばれ、ブラックホールの質量を  $M$  とすると  $T_H = 1/(8\pi GM)$  で与えられる。またその熱的放射を Hawking 放射と呼ぶ。彼の議論はその後回転しているブラックホール [2] や荷電を伴ったブラックホール [3] にも拡張されて、やはり地平線から熱的放射が出ていることが示されている。また宇宙初期のインフレーション後期に現われ得るワームホールも Hawking 放射を出す [4]。

しかし Hawking の解析は放射が放射されることによる時空への反作用を考慮していない。このために現在でも種々な問題が残されている。

反作用を取り入れた場合にはブラックホール形成において地平線が本当に形成されるかどうかは自明ではない。地平線が一度できてから反作用の効果で消えてしまう可能性も考えられるし、初期の段階から最後まで地平線が現われない可能性も考えられる。

また Hawking 放射は反作用を考慮した後も熱的放射として存在するかどうかは不



明である。輻射が出ても Planck 分布から大幅にずれたスペクトラムになっている可能性が考えられるし、また輻射自体が残らない可能性もある。

またブラックホールが輻射で質量を失いながら最終的にどのような状態へ落ち着くかも明らかではない。完全に蒸発して消滅する可能性 [1] や、ある特定の残留物に到達する可能性 [10] や、我々の宇宙から分岐していく子宇宙を形成する可能性 [11] などが考えられている。

反作用を取り入れた時ブラックホールがどのような過程を経て、最終状態に移行するかという事は量子力学と相対論を結合して出てくる原理的な問題もはらむ。重力崩壊の初期にはブラックホールを形成する粒子は量子力学的純粋状態に設定できる。ある時間が経過すると古典論的には各粒子は地平線に覆われる。その後地平線の外で観測できるのは熱的な Hawking 輻射だけであり、この熱的輻射を最後まで放出し続けてブラックホールが完全に消滅したとすると、最終的な量子状態は混合状態になっているように思える [1]。それは空間に最終的に残っているのが熱的な輻射だけであり、熱的輻射は状態ベクトルではなく統計力学系における密度行列で記述されるのが普通知られていることだからである。もしこのような事が実現すれば、系の状態は量子力学的純粋状態から混合状態へ発展しており、それはユニタリーな時間発展ではない。このことは量子力学の基本原理の変更を意味することになる。またバリオンでブラックホールを作った場合でも、Hawking 輻射で出てくる成分は熱的に励起しやすい軽いレプトンがほとんどである。従ってこのようなブラックホール消滅のシナリオにおいてはバリオン数の情報は失われ、保存則は大きく破れる。この原理的問題は最終的に系の情報を失うことから Information Loss 問題と呼ばれている。

Information Loss 問題に対しては前に述べた量子力学の変更以外にも様々な可能性が言われている。ブラックホールは最終的には蒸発するが反作用の効果で Hawking 輻射の熱的振るまいが大きく変更されて、地平線の中に蓄えられた情報が輻射で運び出される可能性もある [9]。またブラックホールが多くの量子数を持つ残留物に移行して、情報はそれに書込まれているという考えもある [10]。ブラックホールが子宇宙を生成するシナリオ [11] では、その子宇宙が情報を担っているとも考えられる。

このように Information Loss 問題の解決には、反作用を取り入れながら時空の発展を詳細に追う事が不可欠である。

これらの諸問題の解決のためには量子力学的効果によるエネルギー運動量テンソル  $\langle T_{ab} \rangle$  を求めておく必要がある。例えば計量がある正定値関数  $\Omega(x)$  を用いて  $g_{ab} = \Omega(x)\eta_{ab}$  と書ける conformally flat な時空に対しては、conformal massless 自由場に対する  $\langle T_{ab} \rangle$  が解析的に求まっている [6,7]。この場合の中には物理的関心の高い一様等方な宇宙モデルなども含まれる。またブラックホール形成を示すある特定の時空での  $\langle T_{ab} \rangle$  も解析可能である [8]。

しかし量子効果の時空への反作用を議論するには、これではまだ足りない。反作用は Einstein 方程式の右辺に生成された輻射のエネルギー運動量テンソル  $\langle T_{ab} \rangle$  を加えることで取り込める。その場合 Einstein 方程式は計量を定める方程式なので、 $\langle T_{ab} \rangle$  は計量の汎関数で書かれている必要がある。つまり任意の計量に対しての  $\langle T_{ab} \rangle$  の表式を得ておく必要がある。4次元では複雑さから任意計量に対する  $\langle T_{ab} \rangle$  を求める事が技術的にできていない現状にある。そのためブラックホールに量子場の反作用をとり入れた4次元での満足のいく議論は今までには存在していない。

このような現状の中で 1992 年に Callan, Giddings, Harvey, Strominger (以降では CGHS と略) によって古典的ブラックホール形成が厳密に解ける重力理論が提案された [12]。2次元では  $\langle T_{ab} \rangle$  がトレースアノマリを用いて計量の汎関数としてあいまいなく求めることができる。CGHS はこの2次元ブラックホールに量子的反作用を考慮してブラックホールの最終状態を考察する試みを行なった。彼等は確定した結論は出さなかったが、ブラックホール蒸発に関して興味ある仮説を提案した。それは量子効果を取り入れると初期にはブラックホールに近い空間を形成するが、未来には特異点も地平線もない平坦な時空が実現するというものである。

その後この仮説の真偽を確かめるために幾つかの仕事がなされている [13,14,15,16]。その結果、反作用を考慮して方程式を解析すると曲率が発散し、かつ地平線で隠されていない特異点が有限の時刻に発生することが指摘された。この特異点では量子重力の効果が強くなり、以後の時空の描像は古典的なものだけでは記述できなくなる。

量子重力まで含めてブラックホール蒸発の記述をする試み [17,18,19] もなされているが、量子重力理論では量子力学的状態や観測量の物理的解釈が不明であり、確定した結論は出ていない。

本論ではこのような状況を踏まえて、CGHS 理論で生じていた難点を回避する Reversed CGHS 重力理論 [21] において物質場の量子効果が地平線をもつ時空へ及ぼす反作用の影響を議論する。

第2章では Reversed CGHS 理論を含めた2次元ディラトン重力理論の解説をおこなう。

第3章では古典的 Reversed CGHS 理論において、特異点は持たないが地平線を伴うワームホールの形成を記述する厳密解を示す。

第4章では反作用を切った解析で前章のワームホールから Hawking 輻射が放射されていることを示す。

第5章では物質場の量子効果がワームホールに与える反作用を議論し、その結果反作用を考慮しなかった時の Hawking 輻射の描像が大きく変更されることを述べる。またワームホールの質量に臨界質量が存在し、それより軽いワームホールは輻射を出して完全に蒸発するが、重いワームホールは蒸発しきれずに地平線を残すことも示される。

第6章において結論を述べる。

なお補遺には本論でたびたび議論される Polyakov 作用の導出法を解説する。

## 2 2次元ディラトン重力理論

### 2.1 一般論

この節では2次元ディラトン重力理論の一般論を議論し、重力定数の定義を述べる。

2次元において重力理論を構成する場合には、高次元重力の場合とは異なる側面が存在する。まず曲率テンソル  $R_{abcd}$  はそのスカラー曲率  $R$  で

$$R_{abcd} = \frac{1}{2}R(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc}) \quad (2)$$

と書ける。そのためスカラー曲率が消えているだけで、時空が平坦であることが言える。

また作用においても2次元は特殊である。3次元以上では重力を記述できる最も簡単な作用として Einstein - Hilbert 作用が知られている。しかし2次元の場合、Einstein - Hilbert 作用は境界項になっており、計量で変分して出てくる Einstein テンソルは恒等的に消えている。

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = 0. \quad (3)$$

従って3階以上の微分を含まない作用を用いて物理的な自由度をもつ重力理論を2次元で構成するには、計量以外に新たな場の自由度が必要である。ここではディラトンと呼ばれるスカラー場  $\phi(x)$  を理論に導入して、2次元重力理論を構成していく。くりこみ可能な一般的な作用は、Power Counting の議論に従うと、

$$S_g = \int d^2x \sqrt{-g} [F(\phi)R + 4G(\phi)(\nabla\phi)^2 + 4\lambda^2 H(\phi)] \quad (4)$$

と書ける。ここで  $\lambda^2$  は宇宙項に相当し、 $1/\lambda$  はこの理論の長さの単位を与える。

作用 (4) 式において一見  $F(\phi)$  の逆数が Einstein 重力での重力定数に対応してみえる。しかし運動方程式を用いて以降議論されるように2次元ではこの対応は正確ではない。これを見るためにディラトン依存性がない物質場の作用  $S_m$  を重力の作用 (4) 式に加えて、その変分から重力に対する運動方程式を出す。ディラトンの変分から

$$\nabla^2\phi + \frac{G'}{2G}(\nabla\phi)^2 - \frac{\lambda^2}{2} \frac{H'}{G} = \frac{F'}{8G}R \quad (5)$$

が得られる。ここでプライムは $\phi$ での微分を表す。計量の変分からは

$$\begin{aligned} & F(R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R) + (\nabla^2 g_{ab} - \nabla_a \nabla_b)F \\ & + 4G(\nabla_a \phi \nabla_b \phi - \frac{1}{2}g_{ab}(\nabla \phi)^2) - 2\lambda^2 H g_{ab} = -\frac{1}{2}T_{ab}^{(m)} \end{aligned} \quad (6)$$

が得られる。ここで $T_{ab}^{(m)}$ は物質場のエネルギー運動量テンソルである。この(6)式の左辺第1項において $F$ は重力定数の逆数のように現われている。しかし2次元の特殊性によって(3)式から、この第1項目は恒等的に消える。従って $F$ が重力定数に相当するかどうかはこれだけの議論ではわからない。

この理論における重力定数の対応物を定義するには、物質場の質量を表すエネルギー運動量テンソルのトレースと時空の曲率を結び付ける式を見るべきである。(6)式で両辺のトレースをとると、

$$\nabla^2 \phi + \frac{F''}{F'}(\nabla \phi)^2 - 4\lambda^2 \frac{H}{F'} = -\frac{1}{2F'}T^{(m)} \quad (7)$$

が得られる。これを(5)式に代入して変形すると、

$$R = -\frac{4G}{F'^2}T^{(m)} + 8[\frac{G'}{2F'} - \frac{GF''}{F'^2}](\nabla \phi)^2 + 4\lambda^2[8\frac{HG}{F'^2} - \frac{H'}{F'}] \quad (8)$$

が与えられる。右辺第1項目は曲率に寄与する物質場のエネルギーを表し、第2項目はディラトンの運動エネルギーを示し、第3項目は宇宙項の寄与を与える。重力定数 $G_{eff}(\phi)$ は物質場と重力場との結合係数である。ここでは(8)式右辺第1項から、それを

$$G_{eff}(\phi) = -\frac{2G(\phi)}{\pi F'(\phi)^2} \quad (9)$$

で定義する。

本論で具体的に議論される Reversed CGHS 理論（古典論）の作用は

$$F = G = -H = -\frac{e^{-2\phi}}{2\pi} \quad (10)$$

と設定した(4)式で与えられる。この理論に対して重力定数は(9)式から

$$G_{eff} = e^{2\phi} \quad (11)$$

で与えられる。

## 2.2 CGHS デイラトン重力理論とブラックホール (古典論)

この節では CGHS 理論におけるブラックホール形成と Hawking 輻射について述べる。

1992 年に CGHS 達によってブラックホールの形成を古典論において厳密に記述できる興味ある 2 次元デイラトン重力理論が提出された [12]。その作用は

$$S = \frac{1}{2\pi} \int d^2x \sqrt{-g} [e^{-2\phi} (R + 4(\nabla\phi)^2 + 4\lambda^2) - \frac{1}{2} \sum_i^N (\nabla f_i)^2] \quad (12)$$

と書かれる。ここで  $\phi$  はデイラトン場である。また  $f_i$  は massless の自由場であり、 $N$  個用意されている。以降では計量をコンフォーマルゲージで表わす。

$$ds^2 = -e^{2\rho} dx^+ dx^-.$$

ここで  $x^\pm = x^0 \pm x^1$  であり、このヌル座標を以降でしばしば用いる。作用 (12) 式を変分して得られる運動方程式は次のものである。

$$-4\partial_+ \partial_- \phi + 4\partial_+ \phi \partial_- \phi + 2\partial_+ \partial_- \rho + \lambda^2 e^{2\rho} = 0, \quad (13)$$

$$2\partial_+ \partial_- \phi - 4\partial_+ \phi \partial_- \phi - \lambda^2 e^{2\rho} = 0, \quad (14)$$

$$e^{-2\phi} (4\partial_\pm \rho \partial_\pm \phi - 2\partial_\pm^2 \phi) + \frac{1}{2} \sum_i \partial_\pm f_i \partial_\pm f_i = 0, \quad (15)$$

$$\partial_+ \partial_- f_i = 0. \quad (16)$$

この方程式系での真空は曲率が 0 で特徴づけられる解であり、

$$f_i = 0, \quad e^{-2\rho} = e^{-2\phi} = -\lambda^2 x^+ x^- \quad (17)$$

と書ける。但し座標領域は  $0 < x^+ < \infty$ ,  $-\infty < x^- < 0$  である。計量をミンコフスキー空間のものに一致させるには次の座標変換をすればよい。

$$x^+ = \frac{e^{\lambda\sigma^+}}{\lambda}, \quad (18)$$

$$x^- = -\frac{e^{-\lambda\sigma^-}}{\lambda}. \quad (19)$$

但し  $\sigma^+$  と  $\sigma^-$  は  $-\infty$  から  $\infty$  までの値をとる。この座標で計量は  $ds^2 = -d\sigma^+ d\sigma^-$  と書ける。またデイラトンは  $\phi = -\lambda\sigma^1$  という静的分布をしている。

以降の議論では Penrose 図という時空の因果構造を示す図をしばしば用いる。Penrose 図では光速で走る世界線は左右 45 度の傾きの直線で表し、時間一定面のような spacelike な世界線は水平線または 45 度を超えない傾きの線、質量をもつ粒子の軌跡のような timelike な世界線は垂直線あるいは 45 度よりきつい傾きの線で表示する。また空間的、時間的無限遠点を因果関係を保ちながら 1 点に写像する。(17) 式の真空解を  $\sigma$  座標で図示したものが図 1 であり、それに対する Penrose 図が図 2 である。左右の空間的無限遠方は Penrose 図において各々  $i_L^0$ 、 $i_R^0$  という点に写像されている。また未来と過去の時間的無限遠方は各々  $i^+$ 、 $i^-$  という点に写像される。 $I_L^+$ 、 $I_R^+$  は Null 世界線が行き着く無限未来の領域を写像したものであり、 $I_L^-$ 、 $I_R^-$  は Null 世界線がさかのぼれる無限の過去の領域を写像したものである。Penrose 図はこのように spacelike、timelike、Null の世界線と無限遠方との因果的な位置関係を端的に示す便利な図形である。

CGHS 理論には静的なブラックホール解が存在している。それは

$$f_i = 0, \quad e^{-2\rho} = e^{-2\phi} = \frac{M}{\lambda} - \lambda^2 x^+ x^- \quad (20)$$

と書かれ、 $M$  がブラックホールの質量である。事象の地平線の位置は次の座標系  $(t, r)$  を導入するとわかりやすい。

$$t = \frac{1}{2\lambda} \ln\left(-\frac{x^+}{x^-}\right), \quad r = \frac{1}{2\lambda} \ln\left(-\lambda^2 x^+ x^- + \frac{M}{\lambda}\right). \quad (21)$$

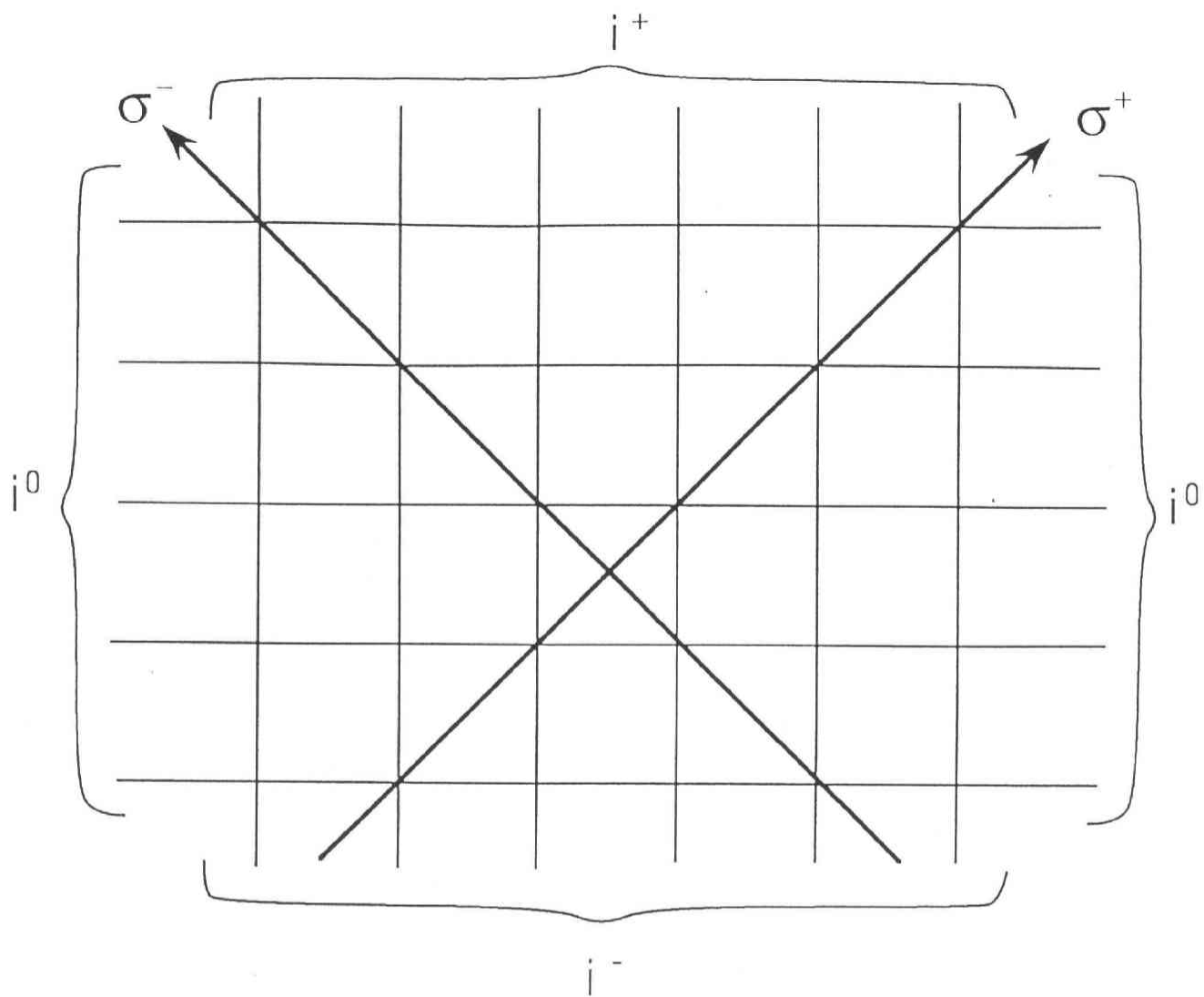
この時、計量は次の正準形に変換される。

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{M}{\lambda} e^{-2\lambda r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{M}{\lambda} e^{-2\lambda r}}. \quad (22)$$

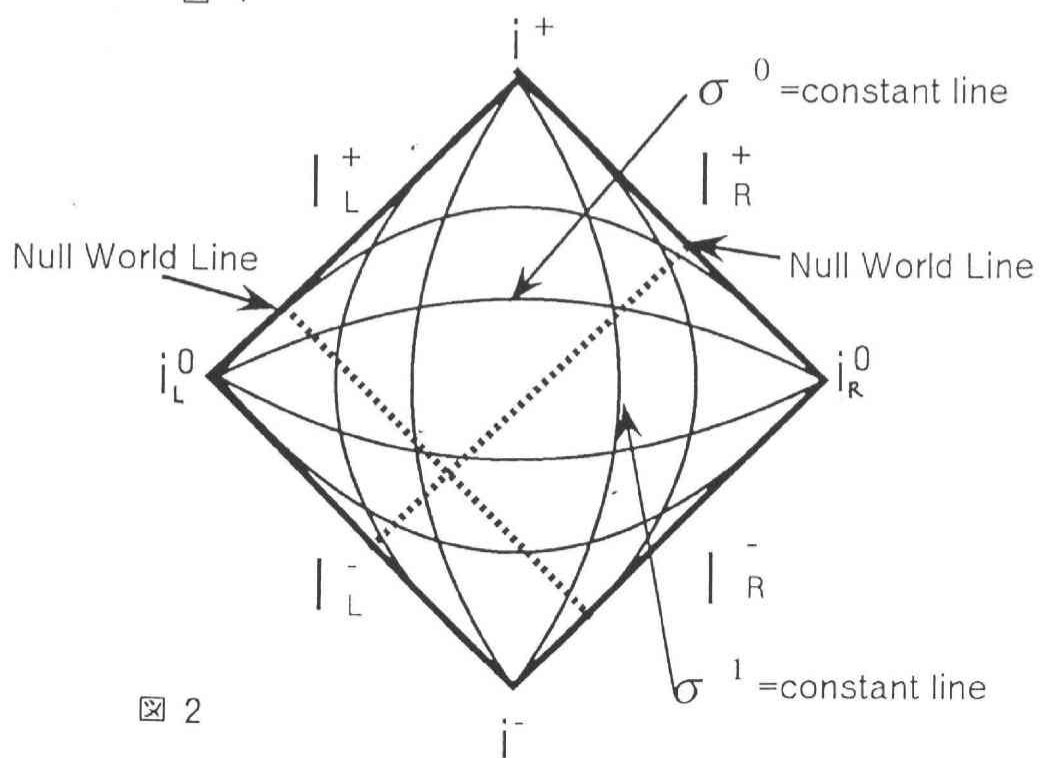
地平線では正準形である計量 (22) の  $(t, t)$  成分が消えることから、

$$r = \frac{1}{2\lambda} \ln\left(\frac{M}{\lambda}\right) \quad (23)$$

が地平線を表わし、またこれはもとの座標系  $(x^+, x^-)$  で  $x_+ = 0$  または  $x_- = 0$  に対応していることもわかる。この時空における因果構造を表すために Penrose 図を図 3 に示す。図 3 で  $i_0$  が空間無限遠方を表し、 $i^+$ 、 $i^-$  はそれぞれ無限の未来と過去を表示している。また曲率特異点は波線で表示された  $S$  に生じており、ブラックホールの

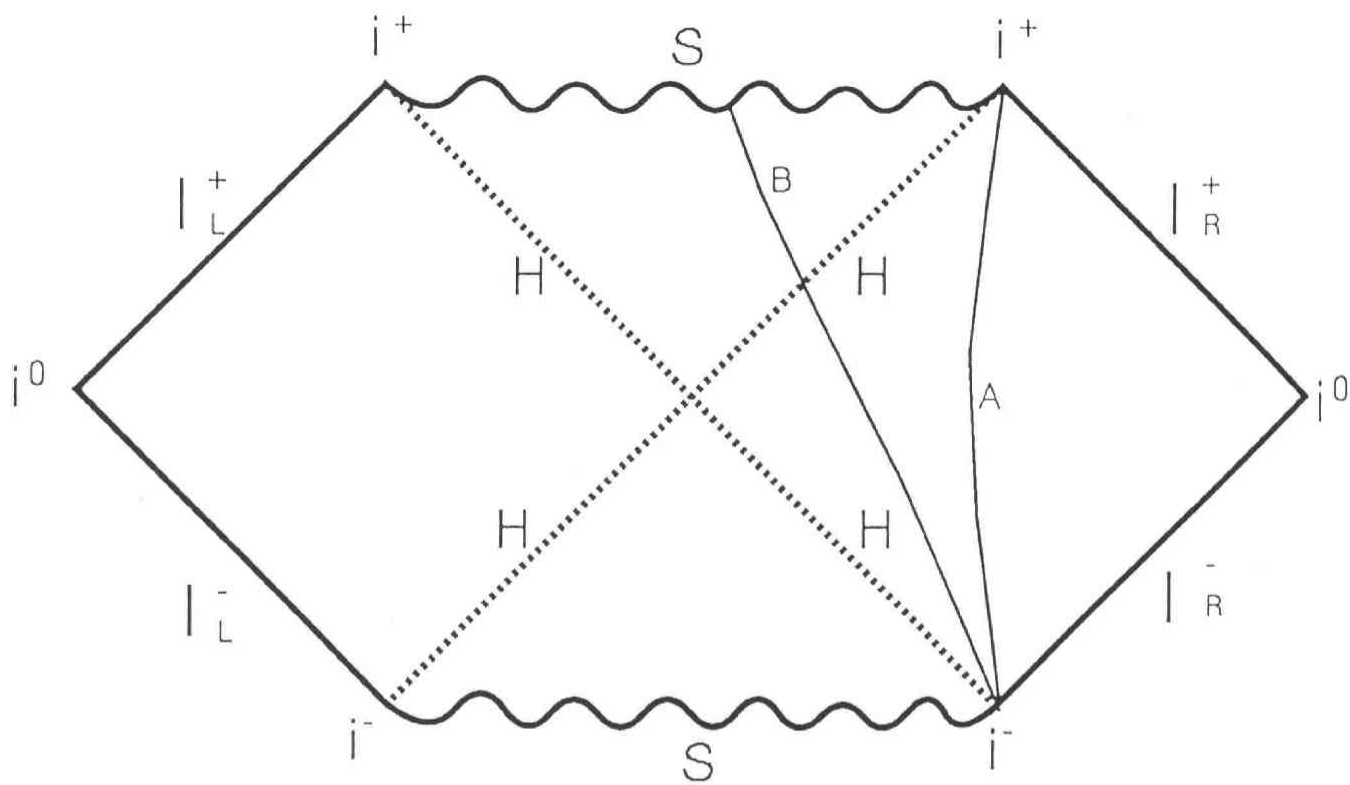


☒ 1

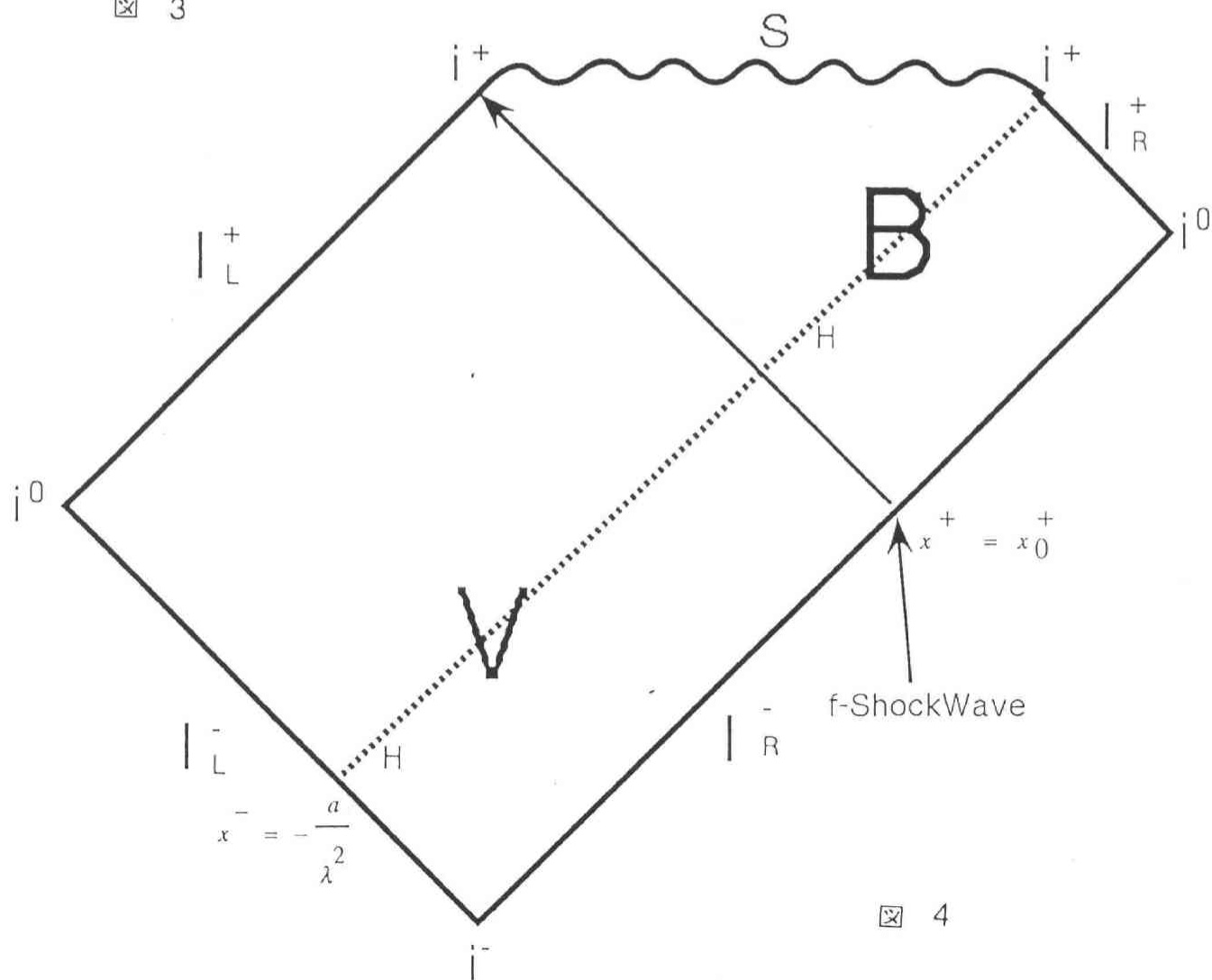


☒ 2





☒ 3



☒ 4

spacelike な特異点を示す。 $H$ が地平線であり、 $I_L^+$ 、 $I_R^+$ 、 $I_L^-$ 、 $I_R^-$ は未来と過去の漸近的平坦な領域を表す。図3のtimelikeな観測者 $A$ は地平線をよぎらず、平坦な領域を通過して無限未来 $i^+$ へ到達するが、観測者 $B$ は地平線を横切ってしまう。地平線はNullな世界線なので、一度地平線を越えた $B$ は例えば光速で逆走しても地平線の外の領域にもどることはできず、特異点 $S$ に衝突してしまう。

方程式系(13)～(16)において、ブラックホールに関して次のような厳密解も書き下すことができる。

$$\frac{1}{2}\partial_+ f_1 \partial_+ f_1 = a\delta(x^+ - x_0^+), \quad (24)$$

$$e^{-2\rho} = e^{-2\phi} = -a(x^+ - x_0^+)\Theta(x^+ - x_0^+) - \lambda^2 x^+ x^-. \quad (25)$$

但し $f_i = 0 (i = 2 \sim N)$ とする。また $a$ は正の定数である。この解は真空(17)中を走る $f_1$ の衝撃波からブラックホールが形成されることを記述している。静的解(20)式と比較すると、その質量は $M_B H = ax_0^0 \lambda$ であり、事象の地平線は $x^- = -\frac{a}{\lambda^2}$ という光線上に現れている。この時空に対するPenrose図を図4に示す。領域 $V$ では真空解(17)式であり、衝撃波 $f$ が通過後の領域 $B$ では静的ブラックホール解(20)式が実現している。

(25)式におけるブラックホールに対して、漸近的平坦な座標を導入しておくことで以降での物理的理解が行いやすい。解(25)式に次の座標変換

$$e^{\lambda\sigma^+} = \lambda x^+, \quad e^{-\lambda\sigma^-} = -\lambda x^- - \frac{a}{\lambda}, \quad (26)$$

を行うと、計量は次のようになる。

$$e^{-2\rho} = \frac{\Theta(\sigma_0^+ - \sigma^+)}{1 + \frac{a}{\lambda}e^{\lambda\sigma^-}} + \frac{\Theta(\sigma^+ - \sigma_0^+)}{1 + \frac{a}{\lambda}e^{\lambda(\sigma^- - \sigma^+ + \sigma_0^+)}}. \quad (27)$$

ここで $\lambda x_0^+ = e^{\lambda\sigma_0^+}$ としてある。この計量は $\sigma^+ \rightarrow \infty$ において確かにMinkowski座標に漸近する。また地平線は $\sigma^- = \infty$ に対応する。

ブラックホール形成時に生成される輻射のエネルギー密度を得るために、物質場の有効作用を議論する。CGHS達は $N$ 個のmassless量子場 $f_i$ の真空分極を表す有効作用：

$$S_{eff} = -i \ln \int Df \exp\left[-\frac{i}{4\pi} \int d^2x \sqrt{-g} \sum_{i=1}^N (\nabla f_i)^2\right] \quad (28)$$

として次の Polyakov 項を採用した。

$$S_{eff} = -\frac{\kappa}{8\pi} \int d^2x \sqrt{-g} R \frac{1}{\nabla^2} R. \quad (29)$$

ここで  $\kappa = \frac{N}{12}$  である。(29) 式は経路積分の測度がディラトン依存性をもたないことを仮定して、例えば Heat Kernel 法で正則化すれば示せる。この項の導出は補遺に集録している。なお (29) 式で注意が必要なのは、積分の測度と正則法をかえると一般座標変換不変で有限な局所的 counter 項が一般には (29) 式に加わるという事である。その場合の理論は、もとの理論と古典極限は同じになるが量子的には異なったものになる。

有効作用 (29) 式はダランベルシアン  $\nabla^2$  の逆を含んでおり、非局所的である。その  $1/\nabla^2$  はグリーン関数であり、境界条件の任意性を含んでいる。そのためこの有効作用を変分して、エネルギー運動量テンソルを出す時には注意を要する。ここではこれをコンフォーマルゲージを用いて評価してみる。このゲージに固定した時には (29) 式は局所的に書け、

$$S_{eff} = -\frac{\kappa}{\pi} \int d^2x \partial_+ \rho \partial_- \rho \quad (30)$$

となる。これを  $\rho$  で変分し 2 で割れば、エネルギー運動量テンソルの  $(+, -)$  成分  $\langle T_{+-} \rangle$  は得ることができる。

$$\langle T_{+-} \rangle = \frac{\kappa}{\pi} \partial_+ \partial_- \rho. \quad (31)$$

但しゲージを固定して作用を局所的にした代償として、計量の  $(\pm, \pm)$  成分の情報は作用 (30) の中には見えなくなっており、作用の変分で  $\langle T_{\pm\pm} \rangle$  を求めることはできなくなっている。しかしこれに関しては  $\langle T_{ab} \rangle$  に対するエネルギー運動量保存則  $\nabla^a \langle T_{ab} \rangle = 0$  を使うことによって補うことができる。今のゲージでこの保存則は

$$\partial_\mp \langle T_{\pm\pm} \rangle = -\partial_\pm \langle T_{+-} \rangle + 2\partial_\pm \rho \langle T_{+-} \rangle \quad (32)$$

と書き下せる。この右辺に (31) 式を代入して、両辺を積分すると、

$$\langle T_{\pm\pm} \rangle = -\frac{\kappa}{\pi} (\partial_\pm^2 \rho - (\partial_\pm \rho)^2 + t_\pm(x^\pm)) \quad (33)$$

という表式が得られる。ここで  $t_\pm$  は積分時に現れる未定関数で  $x^\pm$  のみによっている。この  $t_\pm$  は物理的な境界条件によって定まる量である。

具体的に漸近的平坦な座標でのブラックホール形成の計量(27) 式を(33) 式に代入し、かつ衝撃波が通過する以前の過去において $\langle T_{--} \rangle$ が無いという条件を課すと、 $t_{\pm}$ は一意的に次のように定まる。

$$t_+ = 0, \quad t_- = \frac{a\lambda e^{\lambda\sigma^-}(1 + \frac{a}{2\lambda}e^{\lambda\sigma^-})}{2(1 + \frac{a}{\lambda}e^{\lambda\sigma^-})^2}. \quad (34)$$

(34) 式を(33) 式に代入してやると、(31) 式とあわせてエネルギー運動量テンソルの $\sigma^+ \rightarrow \infty$  の未来での振舞が次のようになることがわかる。

$$\langle T_{++} \rangle \rightarrow 0, \quad \langle T_{+-} \rangle \rightarrow 0, \quad \langle T_{--} \rangle \rightarrow -\frac{\kappa\lambda^2}{4\pi} \frac{1 + \frac{2\lambda}{a}e^{-\lambda\sigma^-}}{(1 + \frac{a}{\lambda}e^{-\lambda\sigma^-})^2}. \quad (35)$$

1次元空間の左から右に流れる成分を表わしている $\langle T_{--} \rangle$ のみが消えずに残っている。これはブラックホールが形成される領域附近から右側の無限遠方へ流れる輻射があることを示している。なお $\langle T_{ab} \rangle$ を $x^0, x^1$ 成分で表したい時は

$$\langle T_0^0 \rangle = -T_{++} - T_{--} - 2T_{+-}, \quad (36)$$

$$\langle T_1^1 \rangle = T_{++} + T_{--} - 2T_{+-}, \quad (37)$$

$$\langle T_0^1 \rangle = T_{++} - T_{--}. \quad (38)$$

という関係式が使える。

ブラックホールが形成されつつあるときには入射粒子のエネルギーの一部がこのような輻射の形で放出されうる。しかし地平線が完成して入射粒子がその中に閉じこめられた後においてはブラックホールの内部エネルギーを無限遠方まで持ち出す媒介物は原理的に存在しえないとも思える。そのような媒介物は光速度を超えてしまうので古典論の範囲では許されないからである。従ってブラックホールにエネルギーは足せても、取り出すことはできない。よって十分時間が経ち、地平線の外にあるエネルギー源が尽きてしまった後にはいかなる輻射も残らない筈である。

ところが地平線が形成される未来において実際にどれだけ輻射が残っているかを見るために(35) 式において $\sigma^- \rightarrow \infty$  の極限を取ると、

$$\langle T_{--} \rangle \rightarrow -\frac{\kappa\lambda^2}{4\pi} \quad (39)$$

という結果が得られ、地平線形成後もある一定のフラックスの輻射がブラックホールから放射され続けていることがわかる。これは2次元における Hawking 輻射であり、量子効果によって生じている。これはつぎのように解釈されている。地平線外側近傍における真空分極によって virtual な粒子が対生成し、1つの粒子が負のエネルギーを持って地平線の内側に落ちて行き、他方の粒子が正のエネルギーを持って空間無限遠方に逃れて Hawking 輻射として観測される。この解釈は地平線近傍  $\sigma^+$ ; *fixed*、 $\sigma^- \rightarrow \infty$  において  $\langle T_{ab} \rangle$  が

$$\langle T_{--} \rangle \rightarrow 0, \langle T_{+-} \rangle \rightarrow 0, \langle T_{++} \rangle \rightarrow \frac{\kappa \lambda^2}{4\pi} \quad (40)$$

と振るまい、負のエネルギー密度  $\langle T_0^0 \rangle = -\frac{\kappa \lambda^2}{4\pi}$  が地平線に流れ込んでいることから支持されている。また無限遠方における輻射のエネルギースペクトラムを見ると Planck 分布を示し [20]、温度は  $T_H = \lambda/2\pi$  である。これは (39) 式のフラックスと整合している。2次元の黒体輻射のエネルギー密度は

$$\rho_{thermal} = N \int_0^\infty \frac{dp}{2\pi} \frac{|p|}{e^{|p|/T} - 1} = \frac{N\pi}{12} T^2 \quad (41)$$

であり、 $T = T_H$  とすると、 $T_{--} = -T_{00} = -\rho_{thermal}$  から式 (39) の値が確かに再現される。

一定の Hawking 輻射が放出され続けるためにブラックホールは時間とともにエネルギーを失うことが期待される。その結果としてブラックホールは最終状態へと移行する。この過程を解析するには輻射を出したことによる反作用を方程式に取り込む必要がある。

### 2.3 ブラックホール形成に反作用を取り入れた解析の現状

この節では物質場の真空分極が前節のブラックホールに及ぼす反作用を取り入れた議論を紹介する。そしてブラックホール蒸発の最終状態について満足いく結論が得られていない現状とその解析を阻んでいる原因を述べる。

CGHS 模型では古典的なブラックホール形成をよく記述した。そして以降でみるように量子場の真空分極が時空に与える反作用の影響を解析する場合にも、この模型

ではある程度解析可能である。それは理論が2次元で構成されている為に、真空分極で誘導される量子場のエネルギー運動量テンソルが解析的に扱えるためである。

CGHS 達自身も彼等の模型に量子場の時空への反作用を取り入れた方程式を議論し、ブラックホール蒸発の最終状態に関してある仮説を示した[12]。それは、量子効果の反作用を考慮すると、物質が重力崩壊した時に初期にはブラックホールに似た構造をもつが最終的には輻射をだして、地平線も特異点も持たない平坦な時空になるというものである。

彼等の提案の後、この仮説に対して多くの解析がなされた[13,14,15,16]。その結果、この仮説を証明するには時空まで量子化する必要があることが指摘されている。量子効果の反作用を取り入れた結果として裸の特異点が発生し、その特異点近傍とその時空点と因果的に結ばれる未来の領域においては量子重力の効果が重要になる[15,16]。量子重力まで考慮した解析[17,18,19]は幾つか試みられているが、その量子力学的状態や観測量などの物理的解釈が確立しておらず、CGHS 模型でのブラックホールの最終状態はいまだ理解されていないと言える。以降ではこの現状を概観する。

運動方程式を導く作用に Polyakov 項(29)式；

$$S_{eff} = -\frac{\kappa}{8\pi} \int d^2x \sqrt{-g} R \frac{1}{\nabla^2} R \quad (42)$$

を加える事で CGHS 達は  $N$  個の massless 場の量子効果を取り入れた[12]。十分大きな  $N$  をとれば (Large  $N$  Approximation)、計量とディラトンの量子効果は物質場のそれに比べて無視できる。そのおかげで量子重力の解釈論を考える必要がなくなり、物理的解釈は通常の量子場の理論に沿ってできる。なおこの近似の妥当性は自明ではなく、解析の後で確認されるべきものである。

Polyakov 項で量子効果を取り入れた運動方程式は

$$-4\partial_+\partial_-\phi + 4\partial_+\phi\partial_-\phi + 2\partial_+\partial_-\rho + \lambda^2 e^{2\rho} = 0, \quad (43)$$

$$2\partial_+\partial_-\phi - 4\partial_+\phi\partial_-\phi - \lambda^2 e^{2\rho} = \kappa e^{2\phi}\partial_+\partial_-\rho, \quad (44)$$

$$e^{-2\phi}(4\partial_\pm\rho\partial_\pm\phi - 2\partial_\pm^2\phi) + \frac{1}{2} \sum_i^N \partial_\pm f_i \partial_\pm f_i$$

$$= \kappa[(\partial_{\pm}\rho)^2 - \partial_{\pm}^2\rho + t_{\pm}(x^{\pm})], \quad (45)$$

$$\partial_+\partial_-f_i = 0 \quad (46)$$

と表される。この方程式系は可解ではなく、解析解は今までに知られていない。しかし曲率や地平線に対しては部分的に解析的な議論が可能であり、幾つかの結論が得られている。

曲率に関しては運動方程式 (43)、(44) を使って、

$$R = \frac{16e^{-2\rho}\partial_+\phi\partial_-\phi + 4\lambda^2}{1 - \kappa e^{2\phi}} \quad (47)$$

という関係式が得られる。 $\kappa = N/12$  は量子効果を表しており、 $\kappa$  が導入されたために出てくる曲率特異点が

$$e^{-2\phi} = \kappa \quad (48)$$

を満たす曲線上に出現する [13]。

曲率特異点が発生しても、それが地平線に隠されている場合ならば無害であり、古典的時空描像は維持できる。(25) 式において  $a = \frac{M}{\lambda x_0^+}$  としたエネルギー運動量テンソルをもつ衝撃波が質量  $M$  のブラックホールを作る場合、(48) 式を満たす特異点は地平線の内部に生じている。衝撃波から特異点が発生し始める点の座標は

$$(x^+, x^-) = (x_0^+, -\kappa/(\lambda^2 x_0^+))$$

であり、また地平線は衝撃波の世界線上の

$$(x^+, x^-) = (x_0^+, -\sqrt{(\frac{M}{\lambda^3 x_0^+})^2 + (\frac{\kappa}{2\lambda^2 x_0^+})^2} - \frac{\kappa}{2\lambda^2 x_0^+})$$

という点から生成され、初期には確かに地平線は特異点の手前に形成されていることがわかる [13]。特異点と地平線の位置関係については、ブラックホール形成の初期以外では厳密な解析はできていない。しかし幾つかの数値計算 [15] がなされており、それによると地平線と特異点は接近を始め、有限の時間後に衝突することが示された。その後地平線は消えるが裸の特異点が時空上に残り、議論に量子重力の効果を取り入れる必要が出てきてしまう。これによって今の段階ではブラックホールの最終状態に

ついて確定した結論は得られていない状況にある。

今までは Polyakov 作用 (29) 式によって定義されていた有効作用に対する理論を解析してきたが、他にも古典極限で CGHS 理論に移行する理論が提案されている [16,17,18]。但し量子論のレベルにおいて異なる理論である。それらは Polyakov 項の有効作用に一般座標変換不変でかつ局所的な counter term を加えて構成されており、量子効果まで含めて可解になるように構成される。

Russo, Susskind, Thorlacius(以降 RST と略記) によって提出された理論もその 1 つである [16]。かれらは古典論における CGHS 作用がもっていた大局的な対称性とそれに付随する保存流に着目した。CGHS 作用 (12) 式は

$$\delta\rho = \delta\phi = \epsilon e^{2\phi} \quad (49)$$

( $\epsilon$ は無限小の定数) という変換で不変であり、そのネーター保存流は

$$J_a = \partial_a(\rho - \phi) \quad (50)$$

で与えられる。かれらはこの対称性を尊重する量子化を念頭におき、このネーター流が量子効果を取り入れても保存するように Polyakov 作用に counter term として

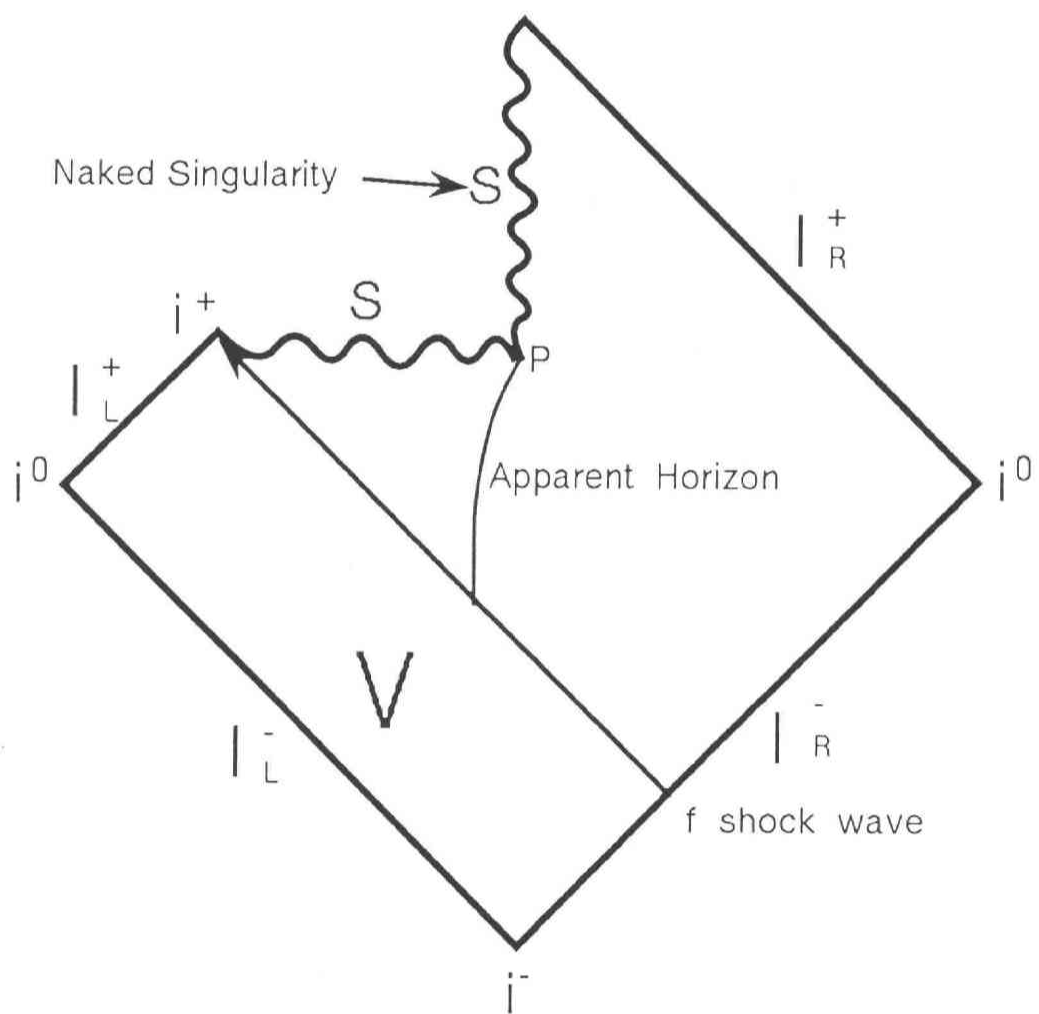
$$S_{\text{counterterm}} = -\frac{\kappa}{4\pi} \int d^2x \sqrt{-g} \phi R \quad (51)$$

を足した次の有効作用を与えた。

$$S_{\text{eff}} = -\frac{\kappa}{8\pi} \int d^2x \sqrt{-g} [R \frac{1}{\nabla^2} R + 2\phi R]. \quad (52)$$

CGHS 模型の古典作用 (12) 式に量子補正 (52) を加えた理論は可解になっている。そのため衝撃波がブラックホールを形成する場合の量子場の反作用は厳密に扱えるが、結論は先の Polyakov 項のみの量子効果をもつ理論と変らない。つまり初期に特異点は地平線に隠されているが、ある有限の時間が経つと 2 つはぶつかり、以後特異点は裸になることが示される。この時空の Penrose 図を図 5 に示す。点 P において地平線と特異点が衝突し、点 P から裸の timelike な特異点が未来に向かって延びている。従って量子的に改良したこの理論においても特異点は避けられず、量子重力理論まで





拡張しなければ結論が得られない状況にある。

CGHS 模型におけるブラックホール蒸発の解析は現在このような行き詰りの状況にある。この模型に固執する限り、時空まで量子化された時の量子状態や観測量の物理解釈を明らかにしなければブラックホールの最終状態は議論できない。しかしその解釈は確定しておらず混沌とした現状と言えよう。

## 2.4 Reversed CGHS ディラトン重力理論

この節では CGHS 理論とは異なる 2 次元ディラトン重力理論である Reversed CGHS 理論を紹介する。

CGHS 模型は古典的には可解であり、ブラックホールの形成もよく記述できたが、量子効果を取り入れると裸の特異点を生じる難点を持っていた。この難点を回避できる異なる 2 次元ディラトン重力理論として 1992 年に Yoshimura によって Reversed CGHS 理論が提唱された [21]。この理論は CGHS 作用の重力に関する運動項の符号を反転させることによって定義される。作用の形は古典論において、

$$S_{R.CGHS} = \frac{1}{2\pi} \int d^2x \sqrt{-g} [e^{-2\phi} (-R - 4(\nabla\phi)^2 + 4\lambda^2) - \frac{1}{2} \sum_i^N (\nabla f_i)^2] \quad (53)$$

と書かれ、第 1 項と第 2 項の符号が CGHS の作用と異なっている。

(53) 式を変分して得られる運動方程式をコンフォーマルゲージ；

$$ds^2 = -e^{2\rho} dx^+ dx^-. \quad (54)$$

で表すと、次のようになっている。

$$-4\partial_+ \partial_- \phi + 4\partial_+ \phi \partial_- \phi + 2\partial_+ \partial_- \rho - \lambda^2 e^{2\rho} = 0, \quad (55)$$

$$2\partial_+ \partial_- \phi - 4\partial_+ \phi \partial_- \phi + \lambda^2 e^{2\rho} = 0, \quad (56)$$

$$e^{-2\phi} (4\partial_\pm \rho \partial_\pm \phi - 2\partial_\pm^2 \phi) - \frac{1}{2} \sum_i^N \partial_\pm f_i \partial_\pm f_i = 0, \quad (57)$$

$$\partial_+ \partial_- f_i = 0. \quad (58)$$

この運動方程式での重力のダイナミクスは、重力定数  $e^{2\phi}$  がディラトン場の空間分布と時間発展に依存しているために複雑である。このため一般的には質点が及ぼす重力の符号は、引力の領域も斥力の領域も存在していることが明らかにされている [24]。

作用 (53) 式はコンフォーマル変換：

$$\delta g_{ab} = 2\epsilon e^{2\phi} g_{ab}, \quad (59)$$

$$\delta\phi = \epsilon e^{2\phi} \quad (60)$$

において不変である。ここで  $\epsilon$  は無限小の数である。その変換に対する保存ネーター流は

$$J_a = \partial_a(\rho - \phi) \quad (61)$$

である。

対称性の存在はこの古典系を可解なものにしている [21,23]。ネーター流保存の式を利用しながら運動方程式 (55) ~ (57) を書き換えると、次の方程式系と等価であることが分る。

$$\partial_+ \partial_- (\rho - \phi) = 0 \quad (62)$$

$$\partial_+ \partial_- e^{-2\phi} - \lambda^2 e^{2\rho-2\phi} = 0 \quad (63)$$

$$\begin{aligned} & \partial_{\pm}^2 e^{-2\phi} - 2\partial_{\pm}(\rho - \phi)\partial_{\pm} e^{-2\phi} \\ &= \frac{1}{2} \sum_i^N (\partial_{\pm} f_i)^2. \end{aligned} \quad (64)$$

(58) 式に関しては自明に解け、次のように  $f_i$  は書ける。

$$f_i = f_i^+(x^+) + f_i^-(x^-). \quad (65)$$

$f_i^+(x^+)$ 、 $f_i^-(x^-)$  はそれぞれ  $x^+$ 、 $x^-$  の任意関数である。またネーター流保存の (62) 式も解けて、 $x^{\pm}$  の関数である  $u_{\pm}(x^{\pm})$  を用いて、

$$\rho - \phi = \frac{1}{2}(u_+(x^+) + u_-(x^-)) \quad (66)$$

となる。この結果を (63) 式に代入し、積分すると、 $x^\pm$  の関数  $v_\pm(x^\pm)$  を用いて

$$e^{-2\phi} = \lambda^2 \int_0^{x^+} e^{u_+} dx^+ \int_0^{x^-} e^{u_-} dx^- + v_+(x^+) + v_-(x^-) \quad (67)$$

という結果が得られる。更にこれを (64) 式に代入してやると、

$$v_\pm'' - u_\pm' v_\pm' = \frac{1}{2} \sum_i^N (\partial_\pm f_i^\pm)^2 \quad (68)$$

という関係が得られる。(68) 式により、 $v_\pm$  は  $u_\pm$  によって次のように表すことができる。

$$v_\pm = A_\pm \int_0^{x^\pm} e^{u_\pm} dx^\pm + C_\pm + \frac{1}{2} \sum_i^N \int_0^{x^\pm} dy^\pm e^{u_\pm(y^\pm)} \int_0^{y^\pm} dz^\pm e^{-u_\pm(z^\pm)} [\partial_\pm f_i^\pm(z^\pm)]^2. \quad (69)$$

ここで  $A_\pm$ 、 $C_\pm$  は積分定数である。従って方程式 (55) ~ (58) は任意関数  $f_i^\pm(x^\pm)$ 、 $u^\pm(x^\pm)$  を用いて完全に解けたことになる。

この一般解に関する有用な事実として、計量を (54) 式の形に固定してもまだ残されているゲージ対称性 (一般座標変換不変性) が存在する事を述べておく。ヌル座標の成分を混ぜない変換

$$x'^\pm = x'^\pm(x^\pm) \quad (70)$$

では新しい計量もコンフォーマルゲージに書ける。

$$ds^2 = -e^{2\rho'} dx'^+ dx'^-, \quad (71)$$

$$\rho' = \rho + \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{dx^+}{dx'^+} \frac{dx^-}{dx'^-} \right]. \quad (72)$$

この自由度を使うと一般性を失わずに、 $u_\pm = -\lambda x^\pm$  とすることができる。このゲージ (以降 homogenous ゲージと呼ぶ) において曲率を持たない真空解は次のように表せる。

$$\rho = 0, \quad f_i = 0, \quad \phi = \lambda x^0. \quad (73)$$

ディラトン場が時間に比例して大きくなっている真空解である事から、Linear Dilaton 真空とも呼ばれる。この真空では重力定数  $e^\phi$  が時間とともに増加する。CGHS 理論

では Linear Dilaton 真空でのディラトンは時間依存性をもたず、かわりに空間座標  $x^1$  に比例したので、重力定数  $e^{2\phi}$  の時空分布は質的に異なっていると言える。

## 2.5 Reversed CGHS 理論における量子効果の反作用

この節では Reversed CGHS 理論に対する物質場の量子補正を議論する。そして CGHS 理論で議論を妨げていた難点が生じないことを述べる。

$N$  個の massless 量子場  $f_i$  の真空分極が時空へ与える反作用は、経路積分から評価される有効作用：

$$S_{eff} = -i \ln \int Df \exp \left[ -\frac{i}{4\pi} \int d^2x \sqrt{-g} \sum_{i=1}^N (\nabla f_i)^2 \right]. \quad (74)$$

を古典論における Reversed CGHS 作用に加えることで考慮できる [21]。経路積分測度にディラトン依存性がないという仮定のもとでは、有効作用は Polyakov 項によって

$$S_{eff} = S_{polyakov} = -\frac{\kappa}{8\pi} \int d^2x \sqrt{-g} R \frac{1}{\nabla^2} R \quad (75)$$

と評価される。この有効作用から導かれるエネルギー運動量テンソルは前述のように

$$\langle T_{+-} \rangle = \frac{\kappa}{\pi} \partial_+ \partial_- \rho, \quad (76)$$

$$\langle T_{\pm\pm} \rangle = -\frac{\kappa}{\pi} (\partial_{\pm}^2 \rho - (\partial_{\pm} \rho)^2 + t_{\pm}(x^{\pm})) \quad (77)$$

であり、 $t_{\pm}(x^{\pm})$  は物理的境界条件で定まる関数である。この場合の量子補正をとり入れた運動方程式は次のように書かれる。

$$-4\partial_+ \partial_- \phi + 4\partial_+ \phi \partial_- \phi + 2\partial_+ \partial_- \rho - \lambda^2 e^{2\rho} = 0, \quad (78)$$

$$2\partial_+ \partial_- \phi - 4\partial_+ \phi \partial_- \phi + \lambda^2 e^{2\rho} = -\pi e^{2\phi} \langle T_{+-} \rangle, \quad (79)$$

$$e^{-2\phi} (4\partial_{\pm} \rho \partial_{\pm} \phi - 2\partial_{\pm}^2 \phi) - \frac{1}{2} \partial_{\pm} f \partial_{\pm} f = -\pi \langle T_{\pm\pm} \rangle, \quad (80)$$

$$\partial_+ \partial_- f_i = 0. \quad (81)$$

量子論のレベルで CGHS 理論と Reversed CGHS 理論に大きな差が存在していることが Yoshimura によって指摘されている [21]。もとの CGHS 理論ではブラック

ホール蒸発において量子効果に誘導された裸の曲率特異点が発生し、理論の予言能力をなくしたが、Reversed CGHS 理論では量子補正で誘導される特異点は回避できる。Reversed CGHS 理論では曲率の表式が (47) 式から

$$R = \frac{16e^{-2\rho}\partial_+\phi\partial_-\phi - 4\lambda^2}{1 + \kappa e^{2\phi}} \quad (82)$$

に変更されて、分母の項は正定値となる。従って CGHS 理論での (47) 式において  $e^{-2\phi} = \kappa$  を満たす時空点に現われていた特異点は、今の場合存在しない。またこの事は量子論での作用の運動項においてもみれる。量子効果の項も含めて運動項をよせ集め、 $\Phi^T = (\rho, \phi, f_1, \dots, f_N)$  というベクトル表示を用いて  $\frac{1}{\pi}\partial_+\Phi^T M(\phi)\partial_-\Phi$  と書き表すと、 $(N+2) \times (N+2)$  行列  $M(\phi)$  の行列式は CGHS 理論においては

$$\det M = -4e^{-4\phi}(1 - \kappa e^{2\phi})\left(-\frac{1}{2}\right)^N$$

となり、特異点の発生した  $e^{-2\phi} = \kappa$  において運動項は縮退してしまっている [17]。しかし Reversed CGHS 理論では

$$\det M = -4e^{-4\phi}(1 + \kappa e^{2\phi})\left(-\frac{1}{2}\right)^N$$

に置きかわって縮退が生じず、時間発展が特異ではなくなる [21]。これは Reversed CGHS 理論の大きな特徴である。

Polyakov 作用 (75) 式を有効作用として用いた理論では、ディラトンのあらわな依存性が量子効果に現われない簡便さがあるが、大局的対称性やそれに対応するネーター流保存則が存在しない。そのため古典論では存在した方程式の可解性もその結果として壊れている。そこで対称性とネーター流保存則を尊重しながら量子補正を取り入れることを以降で議論する。

(74) 式では、経路積分の測度と正則化法の選択の任意性に対応して、一般座標変換不変で有限な局所的 counter 項の不定性が許されている。

但しディラトン依存性を積分測度に持たせなければ、counter 項も計量のみで構成される。現われ得る counter 項は

$$S_{\text{counter}} = \int d^2x \sqrt{-g} [c_1 \lambda^2 + c_2 R] \quad (83)$$

であるが、第2項目は2次元の特殊性から境界項であり、考慮しなくとも良い。第1項は古典作用に含まれていたものとは異なる種類の宇宙項であるが、これを加えても系の可解性は回復できない。

物質場  $f$  は古典的にはディラトンと結合しなくとも、量子効果がその依存性を持たない理由はない。経路積分の測度や正則化法にディラトン依存性をいれることも可能である。ディラトンの自由度との量子的な結合を考慮した場合現われ得る counter 項は次のものである。

$$S_{counter} = \int d^2x \sqrt{-g} [C_1(\phi)R + 4C_2(\phi)(\nabla\phi)^2 + 4\lambda^2 C_3(\phi)]. \quad (84)$$

ここで  $C_1$ 、 $C_2$ 、 $C_3$  は  $\phi$  の任意関数である。この補正項を含めた全作用

$$S_{total} = S_{RCGHS} + S_{Polyakov} + S_{counter}$$

に大域的対称性を持たせた可解理論はいくつか存在する [16,17,18]。

以降では、量子的に変形されたコンフォーマル変換：

$$\delta g_{ab} = 2\epsilon \frac{e^{2\phi}}{1 + \frac{\kappa}{4}e^{2\phi}} g_{ab} \quad (85)$$

$$\delta\phi = \epsilon \frac{e^{2\phi}}{1 + \frac{\kappa}{4}e^{2\phi}} \quad (86)$$

のもとで  $S_{total}$  が不変であり、かつそのネーター流がくりこみを受けないという条件を理論に要請する。この条件から counter 項は次の形に一意的に定まる。

$$S_{counter} = -\frac{\kappa}{4\pi} \int d^2x \sqrt{-g} \phi R \quad (87)$$

実際  $S_{total}$  が変換 (85) 式、(86) 式で不変という条件から  $S_{counter}$  は

$$\begin{aligned} S_{counter} = & \int d^2x \sqrt{-g} \left[ -\frac{\kappa}{4\pi} \phi R \right. \\ & + D_1 \left[ (e^{-2\phi} - \frac{\kappa}{2}\phi)R + 4(e^{-2\phi} + \frac{\kappa}{4})(\nabla\phi)^2 \right] \\ & + D_2 \left[ e^{-2\phi} + \frac{\kappa}{4} \right]^2 (\nabla\phi)^2 \\ & \left. + 4\lambda^2 D_3 e^{-2\phi} \right] \end{aligned} \quad (88)$$

という形まで制限される。但し  $D_1$ 、 $D_2$ 、 $D_3$  は任意定数である。 $D_3$  の項は古典論の作用中の宇宙項にくりこめる。また保存ネーター流は

$$J_a = (1 - 2D_1)\partial_a(\rho - \phi) - 2D_2(e^{-2\phi} + \frac{\kappa}{4})\partial_a\phi \quad (89)$$

と書ける。従ってネーター流がくりこみを受けない要請から  $D_1 = D_2 = 0$  となり、(87) 式の counter 項だけが許されることになる。

この理論は Reversed CGHS 理論を RST 変形したものに当たる。以降この量子論を Reversed RST 理論 [22,23] と呼ぶ。

くりこみを受けなかったネーター流：

$$J_a = \partial_a(\rho - \phi) \quad (90)$$

が保存することを用いると Reversed RST 理論の方程式は次のように書き下せる。

$$\partial_+\partial_-(\rho - \phi) = 0, \quad (91)$$

$$\partial_+\partial_-(e^{-2\phi} + \frac{\kappa}{2}\phi - \kappa\rho) - \lambda^2 e^{2\rho-2\phi} = 0, \quad (92)$$

$$\begin{aligned} & \partial_\pm^2(e^{-2\phi} + \frac{\kappa}{2}\phi - \kappa\rho) + \partial_\pm(\rho - \phi)\partial_\pm(-2e^{-2\phi} + \kappa\rho) \\ &= \kappa t_\pm + \frac{1}{2} \sum_i^N (\partial_\pm f_i)^2. \end{aligned} \quad (93)$$

$$\partial_+\partial_-f_i = 0, \quad (94)$$

(91) 式がネーター流保存を表している。なおこの真空分極の効果を方程式に取り入れた結果、有効重力定数の定義も変更される。曲率とエネルギー運動量テンソルのトレースを結びつける関係式は今の場合

$$R = \frac{2\pi e^{2\phi}}{(1 + \frac{\kappa}{4}e^{2\phi})^2} T^{(m)} - 4 \frac{(\nabla\phi)^2}{1 + \frac{\kappa}{4}e^{2\phi}} - \frac{4\lambda^2}{1 + \frac{\kappa}{4}e^{2\phi}} \quad (95)$$

で与えられる。これから読み取れる有効重力定数  $G_{eff}$  は

$$G_{eff} = \frac{e^{2\phi}}{(1 + \frac{\kappa}{4}e^{2\phi})^2} \quad (96)$$



である。

一般解は RST 変形のおかげであらわに構成することができる [23]。結果は

$$\rho - \phi = \frac{1}{2}(u_+(x^+) + u_-(x^-)), \quad (97)$$

$$e^{-2\phi} + \frac{\kappa}{2}\phi - \kappa\rho = \lambda^2 \int_0^{x^+} e^{u_+} dx^+ \int_0^{x^-} e^{u_-} dx^- + v_+(x^+) + v_-(x^-). \quad (98)$$

$$\begin{aligned} v_{\pm} &= A_{\pm} \int_0^{x^{\pm}} e^{u_{\pm}} dx^{\pm} + C_{\pm} \\ &+ \int_0^{x^{\pm}} dy^{\pm} e^{u_{\pm}(y^{\pm})} \int_0^{y^{\pm}} dz^{\pm} e^{-u_{\pm}(z^{\pm})} \\ &\times \left[ \frac{1}{2} \sum_i^N (\partial_{\pm} f_i)^2 + \kappa t_{\pm} + \frac{\kappa}{4} (u'_{\pm}(z^{\pm}))^2 \right]. \end{aligned} \quad (99)$$

となる。

また Reversed RST 理論では曲率特異点は存在しないことが示せる。このことは古典論の Reversed CGHS 理論において現われた曲率特異点も物質場の量子効果で融けることを意味している。古典論での一般解に対する曲率の表式は

$$\begin{aligned} R = & -4\lambda^2 \\ & + 4e^{2\phi} [A_+ + \lambda^2 \int e^{u_-} dx^- \\ & + \frac{1}{2} \int e^{-u_+} \sum_i^N (\partial_+ f_i)^2 dx^+] \\ & \times [A_- + \lambda^2 \int e^{u_+} dx^+ \\ & + \frac{1}{2} \int e^{-u_-} \sum_i^N (\partial_- f_i)^2 dx^-] \end{aligned} \quad (100)$$

と書ける。ここで曲率が発散するのは

$$\begin{aligned} e^{-2\phi} = & \lambda^2 \int e^{u_+} dx^+ \int e^{u_-} dx^- \\ & + A_+ \int e^{u_+} dx^+ + A_- \int e^{u_-} dx^- + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int dx^+ e^{u_+} \int dy^+ e^{-u_+} \frac{1}{2} \sum_i^N (\partial_+ f_i)^2 \\
& + \int dx^- e^{u_-} \int dy^- e^{-u_-} \frac{1}{2} \sum_i^N (\partial_- f_i)^2
\end{aligned} \tag{101}$$

が0になる時空点である。しかしこのような時空点が存在しても、量子効果で曲率は発散しなくなる。実際、量子効果を取り入れた一般解に対する曲率は

$$\begin{aligned}
R = & \frac{4}{(1 + \frac{\kappa}{4} e^{2\phi})^3} \\
& \times [-\lambda^2 (1 + \frac{\kappa}{4} e^{2\phi})^2 \\
& + e^{2\phi} [A_+ + \frac{\kappa}{2} e^{-u_+} u'_+ \\
& + \lambda^2 \int e^{u_-} dx^- \\
& + \int e^{-u_+} [\frac{1}{2} \sum_i^N (\partial_+ f_i)^2 + \kappa t_+ + \frac{\kappa}{4} (u'_+)^2] dx^+] \\
& \times [A_- + \frac{\kappa}{2} e^{-u_-} u'_- \\
& + \lambda^2 \int e^{u_+} dx^+ \\
& + \int e^{-u_-} [\frac{1}{2} \sum_i^N (\partial_- f_i)^2 + \kappa t_- + \frac{\kappa}{4} (u'_-)^2] dx^-]
\end{aligned} \tag{102}$$

と書け、ディラトン場の決定方程式は

$$\begin{aligned}
& e^{-2\phi} - \frac{\kappa}{2} \phi \\
= & \frac{\kappa}{2} (u_+ + u_-) + \lambda^2 \int e^{u_+} dx^+ \int e^{u_-} dx^- \\
& + A_+ \int e^{u_+} dx^+ + A_- \int e^{u_-} dx^- + C \\
& + \int dx^+ e^{u_+} \int dy^+ e^{-u_+} [\frac{1}{2} \sum_i^N (\partial_+ f_i)^2 + \kappa t_+ + \frac{\kappa}{4} (u'_+)^2] \\
& + \int dx^- e^{u_-} \int dy^- e^{-u_-} [\frac{1}{2} \sum_i^N (\partial_- f_i)^2 + \kappa t_- + \frac{\kappa}{4} (u'_-)^2]
\end{aligned} \tag{103}$$

と変形される。(103)式において右辺は $\phi$ に関して単調減少関数で、 $\infty$ から $-\infty$ までの値をとれる。従って古典論において特異点を生じさせる左辺の零点が存在しても、 $e^{2\phi}$ は発散しない。従って(102)式の曲率は至る所で正則である。

### 3 Reversed CGHS 理論におけるワームホール解

この章では Reversed CGHS 理論に現われる特異点を持たないが地平線を伴うワームホール解を議論する。この理論では古典的な静止質量源がそのワームホールを形成させる。

CGHS 理論では Linear Dilaton 真空内をはしる massless 場の衝撃波によって、ブラックホールを発生させることができた。それは真空中といえども、重力定数にあたる  $e^{2\phi}$  が空間方向に変化しており、そのディラトンと衝撃波が“衝突”してブラックホールを形成させたと理解できる。一方 Reversed CGHS 理論での Linear Dilaton 真空ではディラトンの分布は空間に対して一様である。そのため真空中の衝撃波の時間発展では CGHS 理論と同じものを期待することはできず、実際にブラックホールのような地平線をもつ時空は形成されないことがわかる。しかし以降の議論で明らかにされるように、Reversed CGHS 理論において古典的な静止質量源を考慮すると2つの地平線を伴ったワームホールが形成されることが分る。このワームホールに関してもブラックホールと同様に Hawking 輻射などの原理的問題が生じており、これらの解決には時空への量子場の反作用の解析が必須である。前章において述べたように量子論として CGHS 理論の難点を持たない Reversed CGHS 理論においては、この反作用に関して明確な解析が進められる。

以降の議論を簡単にするために、古典的質量源が  $x^1 = 0$  に局在していると仮定する。質量  $M/\pi$  をもつ局在質量源の作用は次のように書ける。

$$S_{massive} = \frac{M}{\pi} \int d\tau \sqrt{-g_{ab}(x(\tau))} \frac{dx^a}{d\tau} \frac{dx^b}{d\tau} \quad (104)$$

これを Reversed CGHS 理論の作用 (53) 式に加えて変分を行ない、運動方程式をたてると次のようになる。

$$\partial_+ \partial_- e^{-2\phi} - \lambda^2 e^{2\rho-2\phi} = -\frac{M}{4} e^\rho \delta(x^1) \quad (105)$$

$$\partial_+ \partial_- (\rho - \phi) = \frac{M}{8} e^{\rho+2\phi} \delta(x^1) \quad (106)$$

$$\partial_\pm^2 e^{-2\phi} - 2\partial_\pm (\rho - \phi) \partial_\pm e^{-2\phi} = \frac{M}{4} e^\rho \delta(x^1) \quad (107)$$

なお解に  $x^1 \rightarrow -x^1$  のもとでの鏡像対称性を課すと質量源の測地線方程式は自動的に満たされている。またここでは massless 場  $f_i$  はないとしている。

この方程式の解は原点以外では、先に解析した一般解 (66) 式、(67) 式、(69) 式において  $\kappa = 0$ 、 $f_i = 0$  としたもので記述される。

$$\rho - \phi = \frac{1}{2}(u_+(x^+) + u_-(x^-)), \quad (108)$$

$$\begin{aligned} e^{-2\phi} &= \lambda^2 \int_0^{x^+} e^{u_+} dx^+ \int_0^{x^-} e^{u_-} dx^- \\ &+ A_+ \int_0^{x^+} e^{u_+} dx^+ + A_- \int_0^{x^-} e^{u_-} dx^- + \tilde{C} \end{aligned} \quad (109)$$

なお  $\tilde{C} = C_+ + C_-$  である。今、原点に対しての鏡像対称性を解に課しているので、未定関数  $F_\pm$  と、未定定数  $g$  と  $h$  を用いて  $u_\pm$  と  $A_\pm$  は次の形に書ける。

$$u_\pm = -\lambda x^\pm + \theta(\mp x^1) F_-(x^\pm) + \theta(\pm x^1) F_+(x^\pm), \quad (110)$$

$$A_\pm = -\lambda + g\theta(\pm x^1) + h\theta(\mp x^1). \quad (111)$$

この配位に対して、

$$e^{-\lambda y} \frac{dy}{dx} = e^{F_+(x) - \lambda x}, \quad (112)$$

を満たす関数  $y(x)$  を用いた座標変換  $x'^\pm = y(x^\pm)$  を行なうと、 $F_+$  の自由度はいつも消去できることが分る。従って以降では  $F_-(x^\pm) = F(x^\pm)$ ,  $F_+(x^\pm) = 0$  とする。また  $h$  も  $e^{-\lambda x'^\pm} = e^{-\lambda x^\pm} - h/\lambda$  という座標変換で消去できる。よってこの章では以後  $h = 0$  とする。

未定関数  $F(x)$  と、未定定数  $g$  を決める条件は原点における運動方程式が与える。(108) 式と (109) 式を運動方程式 (105) ~ (107) に代入して、出てくる  $\delta(x^1)$  に比例する項の係数を比較する事により、

$$\dot{F} = \frac{dF}{dt} = \frac{M}{2} e^{2\bar{\phi} + \bar{\rho} + \frac{1}{2}F}. \quad (113)$$

$$\lambda^2 \int_0^t e^{F(x) - \lambda x} dx + \lambda e^{F(t) - \lambda t} + g - \lambda = \frac{M}{2} e^{\bar{\phi} + \frac{1}{2}F}. \quad (114)$$

という関係式が得られる。ここで

$$\bar{\rho} = \rho(x^0 = t, x^1 = 0), \quad (115)$$

$$\bar{\phi} = \phi(x^0 = t, x^1 = 0) \quad (116)$$

としてある。更に  $x^1 = 0$  における (108) 式と (109) 式から、 $\bar{\rho}$  と  $\bar{\phi}$  は次の関係も満たさなければならない。

$$\bar{\rho} - \bar{\phi} = -\lambda t + \frac{1}{2}F(t), \quad (117)$$

$$e^{-2\bar{\phi}} = \bar{C} + \left(\frac{g}{\lambda} - 1\right)(1 - e^{-\lambda t}) - \lambda e^{-\lambda t} \int_0^t e^{F(x) - \lambda x} dx. \quad (118)$$

方程式 (113) ~ (118) の解を求めるのには次の  $G$  という変数を用いると便利である。

$$G(t) = \int_0^t e^{F(x) - \lambda x} dx. \quad (119)$$

これを使って、(113) 式を書き換えると、

$$\ddot{G} + \lambda \dot{G} = \frac{M}{2} e^{-2\lambda t} (e^{2\bar{\phi} + \lambda t} \dot{G})^{\frac{3}{2}}. \quad (120)$$

が得られ、(114) 式を書き換えると、

$$\dot{G} + \lambda G + \frac{g}{\lambda} - 1 = \frac{M}{2\lambda} (e^{2\bar{\phi} + \lambda t} \dot{G})^{\frac{1}{2}}. \quad (121)$$

となる。また (118) 式から

$$e^{-2\bar{\phi}} = \bar{C} + \left(\frac{g}{\lambda} - 1\right)(1 - e^{-\lambda t}) - \lambda e^{-\lambda t} G(t). \quad (122)$$

が得られる。(121) 式を微分して (120) 式を代入すると、変数

$$O = e^{2\bar{\phi} + \lambda t} \dot{G}, \quad (123)$$

に対して閉じた 1 階微分方程式が得られる。

$$\frac{d}{dt} O^{\frac{1}{2}} = \lambda e^{-2\lambda t} O^{\frac{3}{2}}. \quad (124)$$

これを積分することにより、積分定数  $B$  を使って

$$O = (e^{-2\lambda t} + B)^{-1} \quad (125)$$

と書ける。(123) 式に (125) 式を代入して

$$\begin{aligned}\dot{G} &= Oe^{-2\bar{\phi}-\lambda t} \\ &= \frac{e^{-2\bar{\phi}-\lambda t}}{e^{-2\lambda t} + B},\end{aligned}\tag{126}$$

という関係式を得られ、更にこれに (122) 式を代入して、最終的に

$$(1 + Be^{2\lambda t})\dot{G} + \lambda G = (\tilde{C} + \frac{g}{\lambda} - 1)e^{\lambda t} + 1 - \frac{g}{\lambda}.\tag{127}$$

という  $G$  に関して閉じた 1 階微分方程式が得られる。(127) 式を積分すると、 $G$  は積分定数  $D$  を用いて

$$G = \frac{\lambda - g}{\lambda^2} - \frac{\tilde{C} + \frac{g}{\lambda} - 1}{B\lambda}e^{-\lambda t} + De^{-\lambda t}\sqrt{1 + Be^{2\lambda t}},\tag{128}$$

と表せる。 $G$  の定義から  $G(0) = 0$  であるが、これから  $D$  は

$$D = \frac{g - \lambda + \frac{\lambda}{B}(\tilde{C} + \frac{g}{\lambda} - 1)}{\lambda^2\sqrt{1 + B}}.\tag{129}$$

と決定される。また (125) 式、(128) 式を (121) 式に代入すると

$$BD = \frac{M}{2\lambda^2}.\tag{130}$$

が要求される。

最終的に (113) ~ (118) 式を満たす  $F$  と  $g$  は、 $M$  と  $B$  と  $A = \frac{\tilde{C} + \frac{g}{\lambda} - 1}{B}$  の 3 つの定数で書き表すことができ、

$$e^{F(x)} = A - \frac{M}{2B\lambda} \frac{1}{\sqrt{1 + Be^{2\lambda x}}},\tag{131}$$

$$g = (1 - A)\lambda + \frac{M}{2B}\sqrt{1 + B}.\tag{132}$$

と表される。これらを総合して (108) 式、(109) 式に代入すると、局在した古典的質量源が存在する場合の、鏡像対称な一般解が次のように求まる [25]。

$$e^{-2\phi} = e^{-2\lambda x^0} \left( A - \frac{M}{2B\lambda} \sqrt{1 + Be^{2\lambda(x^0 - |x^1|)}} \right) + AB,\tag{133}$$

$$e^{2\rho} = e^{2\phi} e^{-2\lambda x^0} \left( A - \frac{M}{2B\lambda} \frac{1}{\sqrt{1 + Be^{2\lambda(x^0 - |x^1|)}}} \right).\tag{134}$$

なおこの解における曲率は

$$R = \frac{2Me^{2\lambda x^0}}{A\sqrt{1 + Be^{2\lambda x^0} - \frac{M}{2\lambda B}}} \delta(x^1) - \frac{4\lambda^2 AB e^{2\lambda x^0}}{A - \frac{M}{2\lambda B} \sqrt{1 + Be^{2\lambda(x^0 - |x^1|)}}} \quad (135)$$

と表される。

一般解(133)(134)において左辺の正定値性から ( $A < 0, B > 0$ ) の場合は除外される。その他のパラメータ領域において時空の因果構造を分類するために、 $C = \frac{2\lambda}{M}AB$  という置き換えと、

$$\tilde{x}^0 = x^0 + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{2\lambda|B|}{M} \quad (136)$$

という時間の原点の置き換えをすると、一般解は次の2つの解の集合に分れる。

(case 1)

$$e^{-2\phi} = e^{-2\lambda x^0} \left( -C + \sqrt{1 - \frac{M}{2\lambda} e^{2\lambda(x^0 - |x^1|)}} \right) + \frac{M}{2\lambda} C, \quad (137)$$

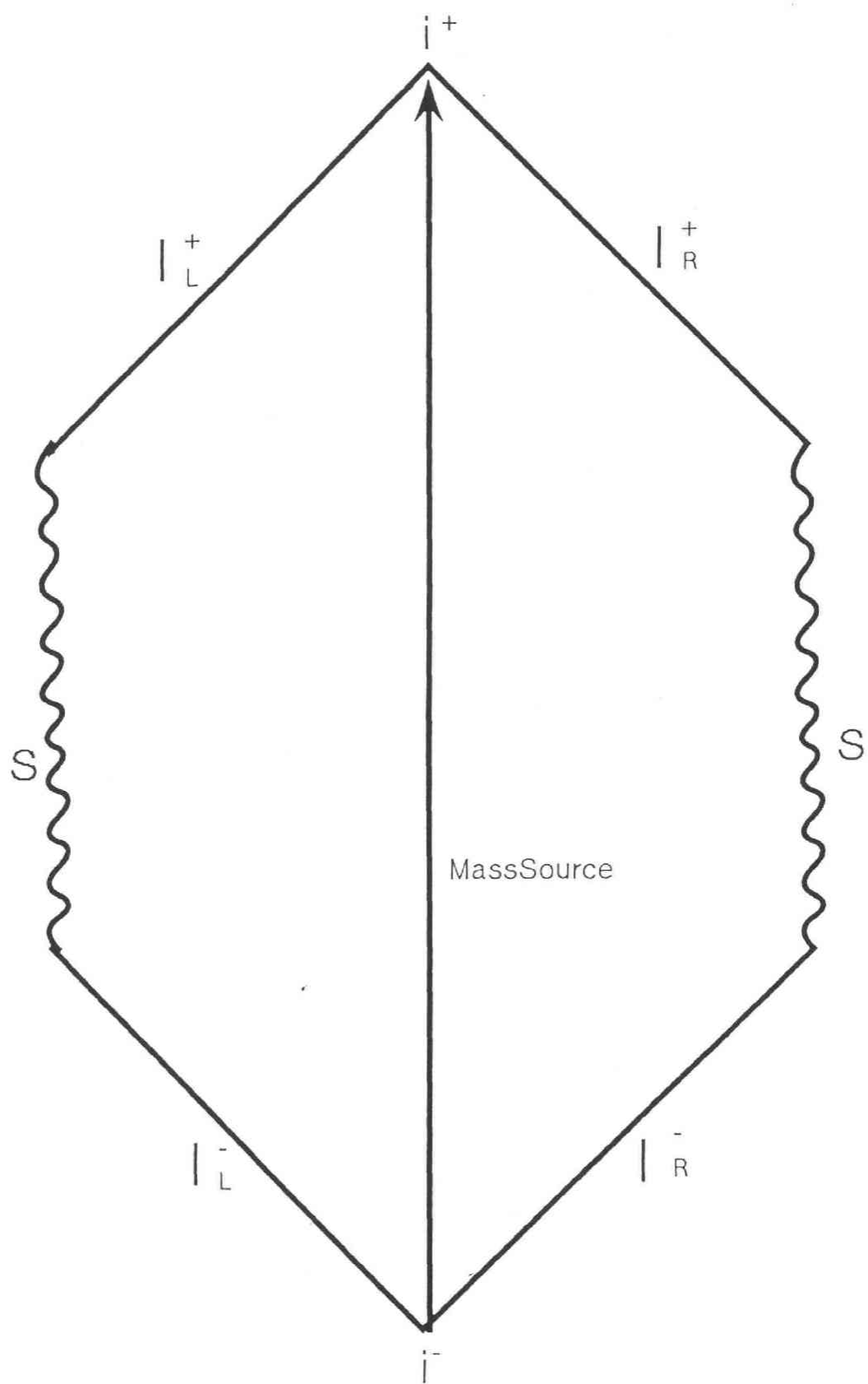
$$e^{2\rho} = e^{2\phi} e^{-2\lambda x^0} \left( -C + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{M}{2\lambda} e^{2\lambda(x^0 - |x^1|)}}} \right). \quad (138)$$

(case 2)

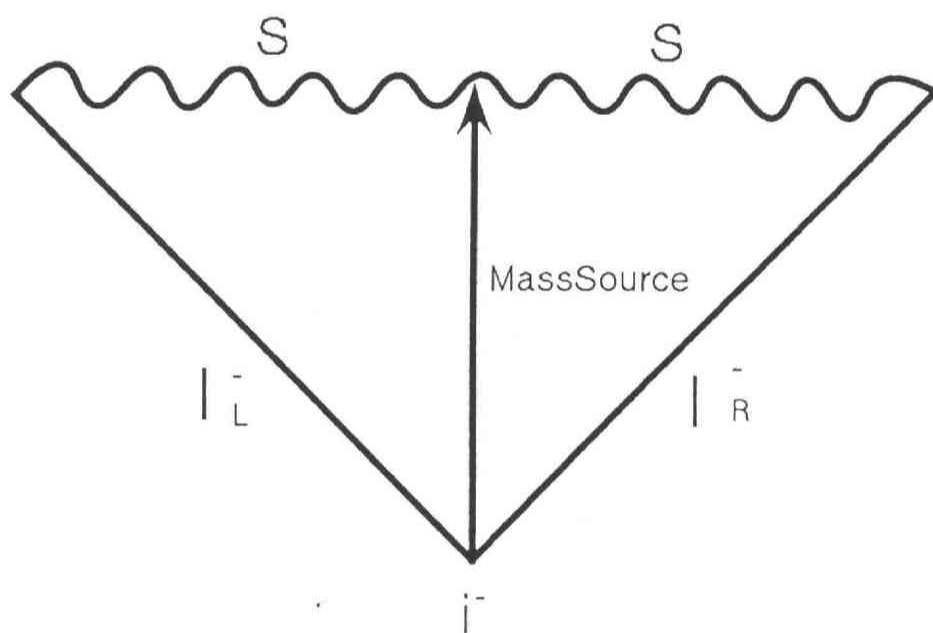
$$e^{-2\phi} = e^{-2\lambda x^0} \left( C - \sqrt{1 + \frac{M}{2\lambda} e^{2\lambda(x^0 - |x^1|)}} \right) + \frac{M}{2\lambda} C, \quad (139)$$

$$e^{2\rho} = e^{2\phi} e^{-2\lambda x^0} \left( C - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{M}{2\lambda} e^{2\lambda(x^0 - |x^1|)}}} \right). \quad (140)$$

(case 1) では  $-\infty < C < \infty$  で、(case 2) では  $0 < C < \infty$  である。以降では  $x^\pm \rightarrow -\infty$  (Infinite Null Past) において Linear Dilaton 真空に漸近する解のみに着目する。この条件から (case 1) では  $-\infty < C < 1$ 、(case 2) では  $1 < C < \infty$  の領域に制限される。







(case 2) において  $1 < C < \infty$  の場合、時空の因果構造は 1 種類だけであり、その Penrose 図は図 6 である。地平線は存在せず、timelike な裸の特異点が生じている。

時空の因果構造は (case 1) では 3 つの場合に分類される。(case 1) において  $0 < C < 1$  の場合を (case 1a) とし、 $C = 0$  の場合を (case 1b) とし、 $-\infty < C < 0$  の場合を (case 1c) として細分科する。

$-\infty < C < 0$  (case 1c) での Penrose 図は図 7 のように書ける。(case 1c) では時間の発展とともに spacelike な特異点につっこむ時空である。

(case 1a)、(case 1b) では  $x^1 > 0$  において  $x^- > -\frac{1}{2\lambda} \ln \frac{M}{2\lambda}$ 、 $x^1 < 0$  においては  $x^+ > -\frac{1}{2\lambda} \ln \frac{M}{2\lambda}$  で指定されるカスプ状の境界構造が時空に現われる。この内部ではディラトン場が複素数になっているおり、物理的には特異な領域である。またこの境界では直接計算から曲率は発散していないことはわかる。従って timelike な測地線がこのカスプ状の境界を有限時間で乗り越えてしまう心配がある。

このカスプの近傍においての timelike な測地線の振る舞いは解析的に調べられる。鏡像対称であることから  $x^1 > 0$  の領域を議論する。Null 世界線

$$x^- = x_H = -\frac{1}{2\lambda} \ln \frac{M}{2\lambda}$$

近傍では (case 1a)、(case 1b) において計量は

$$e^{2\rho} = \frac{\omega(x^+)}{(x_H - x^-)^a} \quad (141)$$

という振る舞いで発散している。ここで (case 1a) では  $a = 1/2$  であつ

$$\omega(x^+) = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}C(\sqrt{\frac{M}{2\lambda}}e^{\lambda x^+} - 1)}$$

であり、(case 1b) では  $a = 1$  であつ  $\omega = 1/(2\lambda)$  である。この計量に対する測地線は

$$S = m \int d\tau \sqrt{-g_{ab} \frac{dx^a}{d\tau} \frac{dx^b}{d\tau}} = m \int dx^- \sqrt{e^{2\rho} \frac{dx^+}{dx^-}} \quad (142)$$

という作用を変分して得られる測地線方程式から定まる。その方程式は

$$\frac{d}{dx^-} \left[ \ln \frac{dx^+}{dx^-} - 2\rho(x^+(x^-), x^-) \right] + 4\partial_+ \rho(x^+(x^-), x^-) \frac{dx^+}{dx^-} = 0 \quad (143)$$

となる。 $x^- = x_H$  近傍においてこの測地線方程式を考えると、(141) 式を (143) 式に代入して

$$\frac{d}{dx^-} \left[ \ln \frac{dx^+}{dx^-} - 2\rho(x^+(x^-), x^-) - 2 \ln \omega(x^+(x^-)) \right] = 0 \quad (144)$$

となる。これを積分すると

$$\int^{x^+} \omega(x^+) dx^+ = \frac{A}{a-1} \frac{1}{(x_H - x^-)^{a-1}} \quad (145)$$

という結果を得る。ここで  $A$  は正の積分定数である。

(145) 式に (case 1a) の  $\omega$  と  $a$  を代入すると、timelike な測地線として

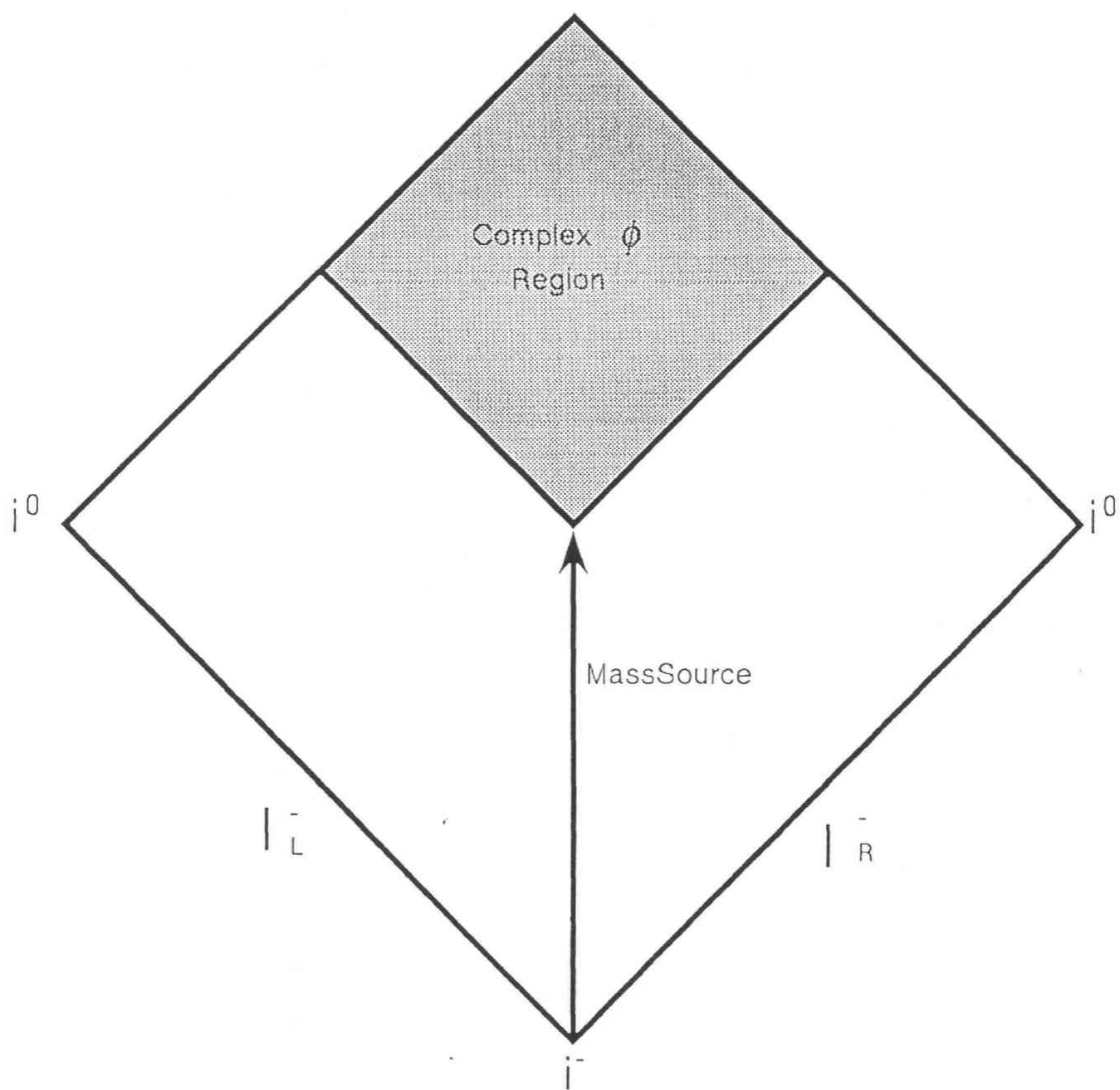
$$e^{-\lambda x^+} = \sqrt{\frac{M}{2\lambda}} - A_2 e^{-A\sqrt{x_H - x^-}} \quad (146)$$

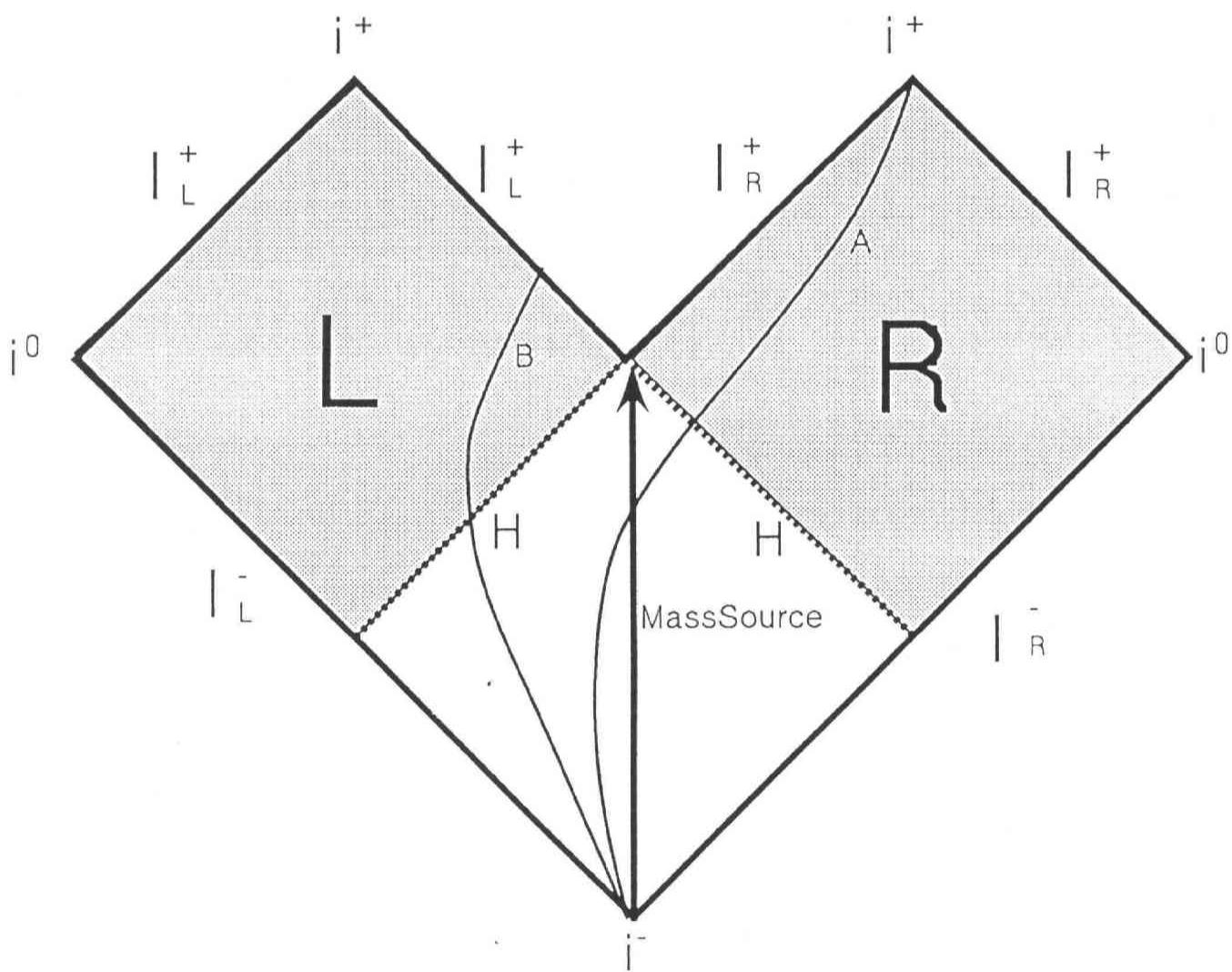
が得られる。 $A_2$  は積分定数である。 $x^- \rightarrow x_H - 0$  において有限の  $x^+$  に到達することがわかる。(case 1a) の時空の未来での境界は、曲率は発散しないがディラトン特異点であるカスプ状境界と裸の曲率特異点から構成されている。従って (case 1a) で timelike な測地線はどちらかの特異点に突入して終わる。この Penrose 図は図 8 である。

(case 1b) では状況は異なる。 $a = 1$  と  $\omega = 1/(2\lambda)$  とを (145) 式に代入して

$$x^+ = -2\lambda A \ln(x_H - x^-) \quad (147)$$

という timelike な測地線が得られる。 $x^- \rightarrow x_H - 0$  において  $x^+ \rightarrow +\infty$  となる。従って  $x^- = x_H$  の境界を timelike な測地線は越えられない。また曲率はあらゆる時空点で発散していない。この場合の Penrose 図は図 9 のように書ける。この時空では曲率特異点は存在せず 2 つの地平線を伴っており、時間発展とともに因果的に結合し得ない 2 つの領域 L、R が形成される。図の観測者 A は領域 R に到達しているが、左の地平線 H を横切った観測者 B はその後逆行しても領域 R には至れない。また A が領域 R に入ってから領域 L に到達することも不可能である。このことは初期には親宇宙





の真空状態にあったが、時間がたつと質量源をはさんで異なる2つの子宇宙へ分岐することを示している。この2つの子宇宙をつなぐ質量源近傍はワームホールと呼ばれる。

次にこの質量源がつくる時空に対して、物理的に自然な境界条件を議論する。Linear Dilaton 真空においては、過去に向かって重力定数  $e^{2\phi}$  が指数関数的に減少し、重力の相互作用が切られている。その領域に質量源を置いても、時空を曲げることはない。従って質量源を含めて全空間で真空解になっている。しかし時間が経てくると、指数関数的に重力相互作用が強くなっていき、時空はそれとともに曲っていく。質量源の影響は因果律を満たしながら、空間を伝わり時空を曲げる。ある有限時刻での空間無限遠方では、質量源とまだ因果的に結合していないので、そこでは真空解のままであるのが物理的に自然である。これにより、自然な境界条件は「 $x^1 \rightarrow \pm\infty$  (Spacelike Infinity) と  $x^\pm \rightarrow -\infty$  (Past Null Infinity) において真空解になる。」と表現される。一般解の中でこれを満たすのは  $C = 0$  (case 1b) の解のみである。他の解では、空間無限遠方に至る途中において特異点が生じており、境界条件を満たしていない。

以降 (case 1b) の解の時空の因果構造を具体的に述べる。解は

$$e^{-2\phi} = e^{-2\lambda x^0} \sqrt{1 - \frac{M}{2\lambda} e^{2\lambda(x^0 - |x^1|)}}, \quad (148)$$

$$e^{2\rho} = \frac{1}{1 - \frac{M}{2\lambda} e^{2\lambda(x^0 - |x^1|)}}. \quad (149)$$

と書けている。

質量源は有限時間で境界点  $(x^+, x^-) = (x_H, x_H)$  に到達する。境界点附近から境界点に到達するのに要する固有時間は (149) 式から

$$\tau \sim \int^{x_H} \frac{1}{\sqrt{2\lambda(x_H - x^0)}} dx^0 \quad (150)$$

で評価されるが、これは有限値に収束している。

この解の特徴は局所的に平坦であることである。つまり、曲率は原点以外では消えており、原点上ではデルタ関数に比例する項だけからなっている。

$$R = 2M e^{2\lambda x^0} \delta(x^1). \quad (151)$$

局所的に平坦なので、例えば  $x^1 > 0$  において  $ds^2 = -d\sigma_R^+ d\sigma_R^-$  となるミンコフスキー座標  $(\sigma_R^+, \sigma_R^-)$  をはることができる。その座標への変換は次のようになっている。

$$\sigma_R^+ = x^+, \quad (152)$$

$$\sigma_R^- = x^- - \frac{1}{2\lambda} \ln(1 - \frac{M}{2\lambda} e^{2\lambda x^-}). \quad (153)$$

$$x^+ = \sigma_R^+, \quad (154)$$

$$x^- = -\frac{1}{2\lambda} \ln(\frac{M}{2\lambda} + e^{-2\lambda\sigma_R^-}). \quad (155)$$

ただし  $-\infty < x^- < x_H = -\frac{1}{2\lambda} \ln \frac{M}{2\lambda}$  である。ディラトンはこの座標において

$$\phi = \lambda \sigma_R^0 \quad (156)$$

となり、Linear Dilaton 真空解になっている。

$x^1 < 0$  においても同様に、 $ds^2 = -d\sigma_L^+ d\sigma_L^-$  となるミンコフスキー座標  $(\sigma_L^+, \sigma_L^-)$  がはれる。この座標への変換は

$$\sigma_L^- = x^-, \quad (157)$$

$$\sigma_L^+ = x^+ - \frac{1}{2\lambda} \ln(1 - \frac{M}{2\lambda} e^{2\lambda x^+}). \quad (158)$$

$$x^- = \sigma_L^-, \quad (159)$$

$$x^+ = -\frac{1}{2\lambda} \ln(\frac{M}{2\lambda} + e^{-2\lambda\sigma_L^+}). \quad (160)$$

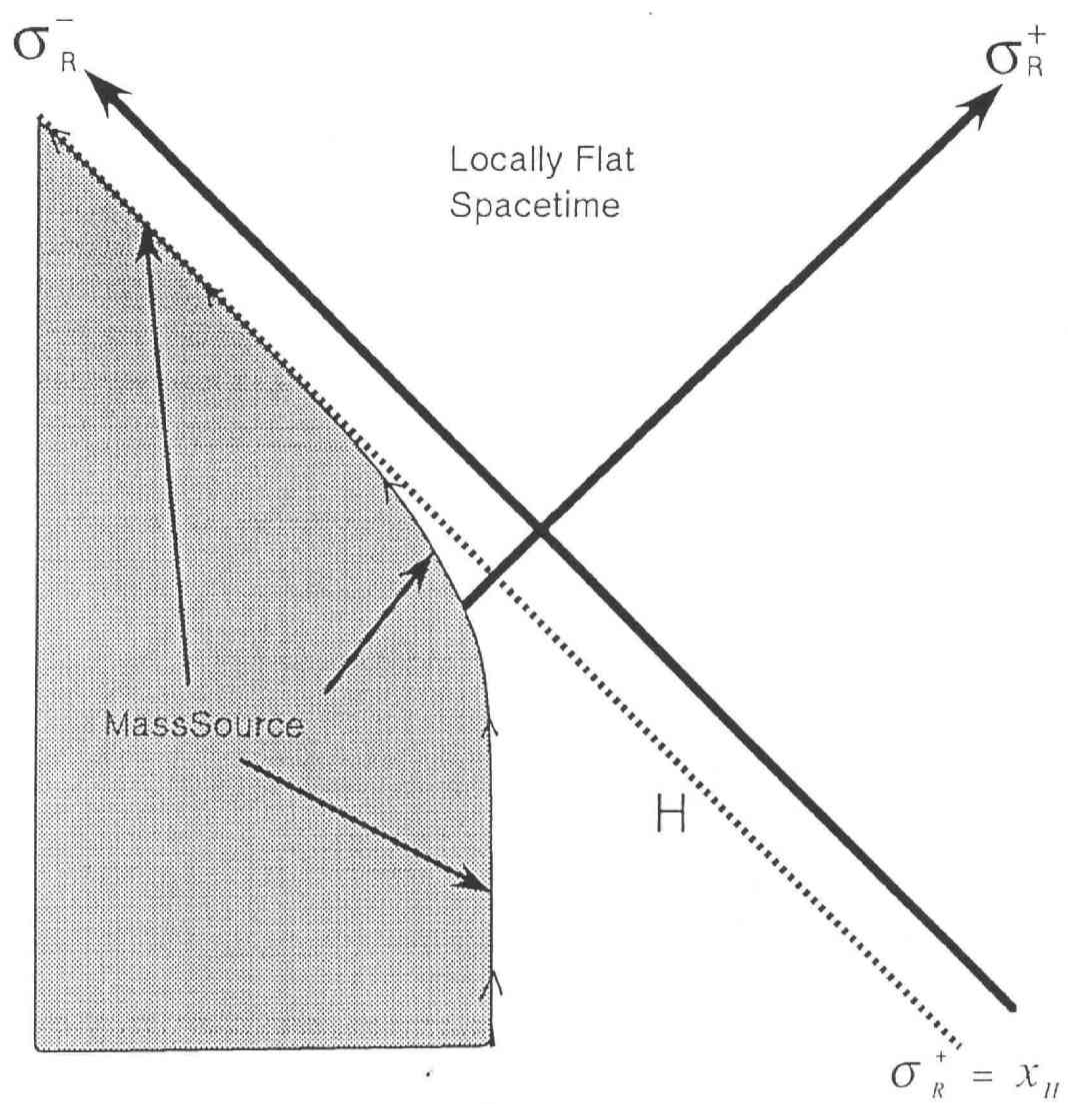
である。左側でもディラトンは

$$\phi = \lambda \sigma_L^0 \quad (161)$$

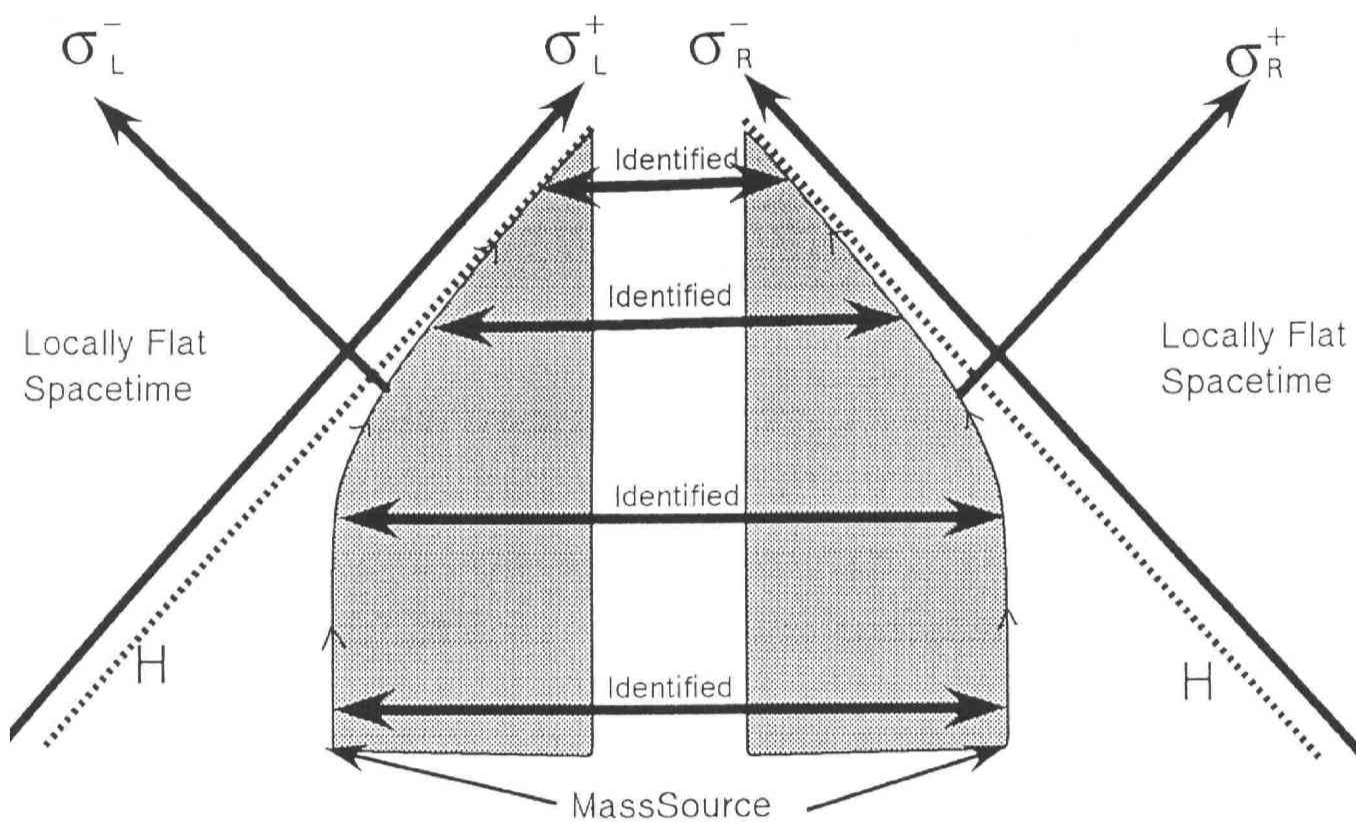
となり、Linear Dilaton 真空に一致している。

右側の  $\sigma_R$  座標において質量源の軌跡 ( $x^1 = 0$ ) は

$$\sigma_R^- = \sigma_R^+ - \frac{1}{2\lambda} \ln(1 - \frac{M}{2\lambda} e^{2\lambda\sigma_R^+}) \quad (162)$$







と表せる。図 10 はこの軌跡を表示している。この座標系では質量源は初期に静止しており、時間とともに左に加速を始め、最終的に Null 世界線  $H$  ;

$$\sigma_R^+ = x_H = -\frac{1}{2\lambda} \ln \frac{M}{2\lambda} \quad (163)$$

に漸近する。左側の  $\sigma_L$  座標においてはこの鏡像反転した運動を質量源は行なう。左右の時空は図 11 のように質量源によってつなげられている。質量源の左側での漸近線  $\sigma_L^- = x_H$  を通過してしまった観測者は右方向にどんなに加速しても、質量源の右側の領域にはもどることは不可能である。この意味でこの漸近線は地平線であり、また (163) 式の漸近線も地平線である。なお時間が十分にたつと地平線である左右の漸近線と質量源の世界線は極度に接近し、区別がつかなくなる。

原点左側の領域から地平線  $\sigma_L^- = x_H$  に沿って質量源をのり越えて右の領域に入る粒子は無限大の赤方変移を受ける。簡単のために原点左側の領域で、 $\sigma_L$  座標に共役な運動量 ( $p_L^+, p_L^- = 0$ ) をもつ massless 粒子を考える。これが地平線のぎりぎり外側  $\sigma_L^- = x_H - \epsilon$  ( $\epsilon$  は正の無限小数) を走りながら、右側の領域に入るとする。この粒子が質量源と交差する座標は (162) 式から

$$(\sigma_L^+, \sigma_L^-) = (x_H - \frac{1}{2\pi} \ln(e^{2\lambda\epsilon} - 1), x_H - \epsilon) \quad (164)$$

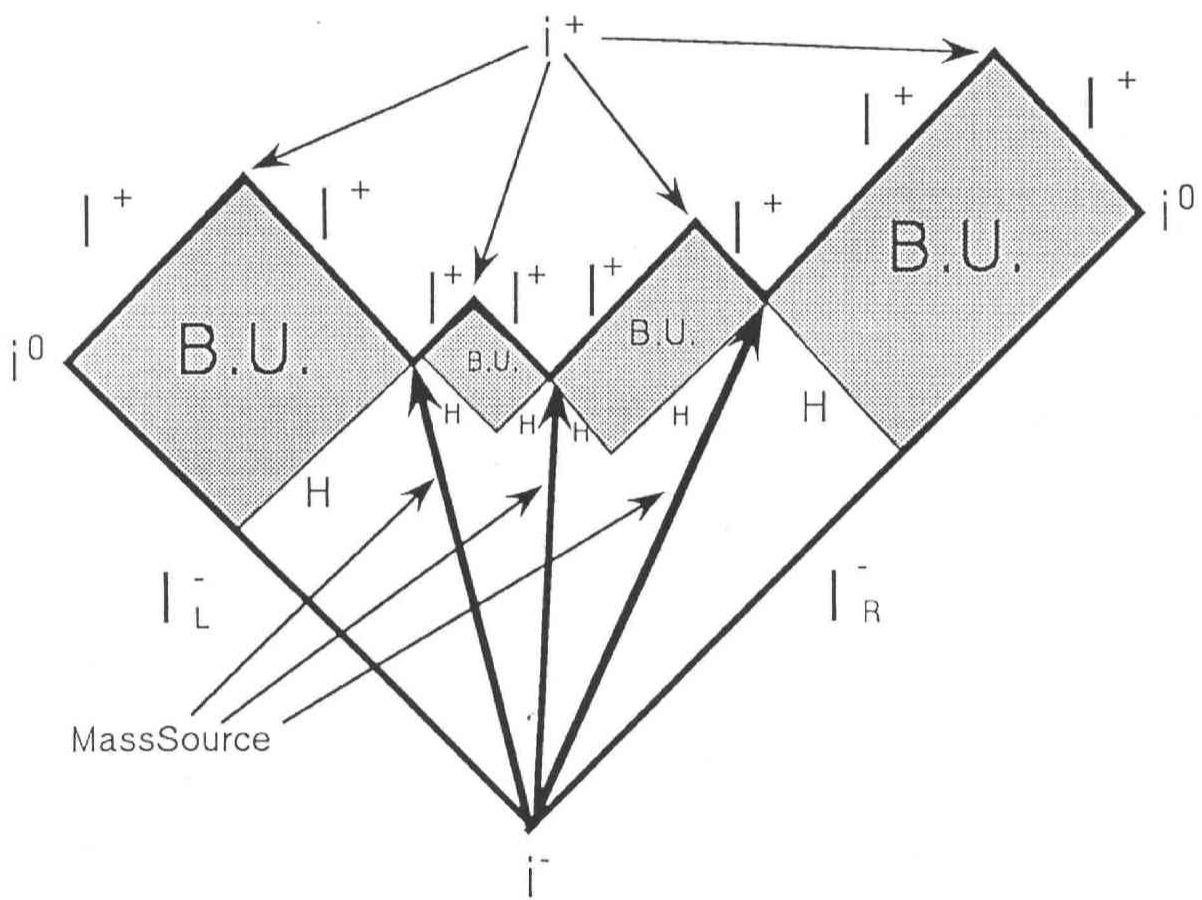
で与えられる。この点をよぎって右の領域に入る時、この粒子の  $\sigma_R$  に共役な運動量 ( $p_R^+, p_R^- = 0$ ) は

$$p_R^+ = \frac{d\sigma_R^+}{d\sigma_L^+} p_L^+ = \frac{p_L^+}{1 + \frac{M}{2\lambda} e^{2\lambda x_H} [e^{2\lambda\epsilon} - 1]^{-1}} \quad (165)$$

と計算できる。この結果において、粒子の軌跡を地平線に近づける ( $\epsilon \rightarrow +0$ ) と、粒子の運動量は無限大の赤方変移をうけて  $p_R^+ \rightarrow 0$  となる。

今は無限の過去に 1 つの局在した質量源をおいた解 (148) 式、(149) 式を議論したが、この解をつなげて任意個数の局在質量源をもつ解を構成することもできる。このことは解 (148) 式、(149) 式が局所的には Linear Dilaton 真空になっているために可能になっている。始めに 1 つの質量源の解を設定し、その質点の右側においてミンコフスキー座標  $\sigma_R$  をはる。その領域に質量  $M_2$  の第 2 の質点を軌跡

$$\sigma_R^+ = L_{(2)} + \sigma_R^- - \frac{1}{2\lambda} \ln(1 - \frac{M_2}{2\lambda} e^{2\lambda\sigma_R^-}) \quad (166)$$



にのせる。ここで  $L_{(2)}$  は定数であり、2つの質点間の距離を示す。そして  $\sigma_R$  座標を第2の質点に対する左側の  $\sigma_L$  ミンコフスキー座標 (157) 式 (158) 式とみなし、解 (148) 式、(149) 式を適用して第2質点の右側の領域に解をつないでいく。この操作を繰り返せば任意個数の局在質量源をもつ厳密解が構成できる。これは無限の過去に、静止している質点で構成されてはいるが、その範囲では任意の質量源分布を与えた時の解であり、かつ  $|x^1| \rightarrow \infty$  と  $x^\pm \rightarrow -\infty$  で真空になるという境界条件も満たしている。また時空構造は図 12 で表されるように子宇宙が複数形成されるワームホール時空を示している。図の B.U. と明記された領域が生成された子宇宙である。このことから連続的な静止質量源分布を与えても、境界条件が満たされていれば普遍的にワームホールが形成されることが期待される。

ここで述べたようにワームホールは地平線を持っている。このような時空の上で量子場をのせると、ブラックホールからの推測で Hawking 輻射が期待できるが、次章においては、それが実際に生じていることが示される。

## 4 ワームホールと Hawking 輻射

この章では量子効果の反作用を切っている場合にワームホールが有限温度の熱的輻射を未来に向かって放出し続けることを述べる。

前章において、古典的質量源が2つの地平線をもつワームホールを形成することが述べられた。その計量は

$$e^{2\rho} = \frac{1}{1 - \frac{M}{2\lambda} e^{2\lambda(x^0 - |x^1|)}}. \quad (167)$$

で与えられる。この時空上に量子場をのせると真空の量子状態から時間とともに量子が励起され、地平線が完成した後はプランク分布のエネルギー Spektrum で特徴づけられる熱的輻射 (Hawking 輻射) が観測される。以降でそれを議論する。

作用が

$$S_f = -\frac{1}{4\pi} \int d^2x \sqrt{-g} (\nabla f)^2 \quad (168)$$

で与えられる自由場  $f$  をこの時空上で量子化する。コンフォーマルゲージ ;  $ds^2 = -e^{2\rho} dx^+ dx^-$  では作用 (168) 式は計量によらず、

$$S_f = \frac{1}{4\pi} \int dx^0 dx^1 [(\partial_0 f)^2 - (\partial_1 f)^2] \quad (169)$$

と書ける。 $f$  に対する共役運動量は  $\Pi = \frac{1}{2\pi} \partial_0 f$  であり、これから交換関係は

$$[f(x^0, x), \partial_0 f(x^0, y)] = 2\pi i \delta(x - y). \quad (170)$$

と設定される。

このワームホール時空では無限の過去には全空間で Linear Dilaton 真空であり、通常の平坦な空間である。従って過去の漸近場 (In Asymptotic Field) に対しては、普通の平面波完全直交モードがとれ、 $f$  はそれで展開できる。

$$f = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{\sqrt{2|p|}} [a_p^{in} e^{i(p x^1 - |p| x^0)} + a_p^{in\dagger} e^{-i(p x^1 - |p| x^0)}]. \quad (171)$$

交換関係 (170) 式から  $a_p^{in}$  と  $a_p^{in\dagger}$  は次の関係を満たす。

$$[a_p^{in}, a_q^{in\dagger}] = \delta(p - q), \quad (172)$$

$$[a_p^{in}, a_q^{in}] = 0, \quad (173)$$

$$[a_p^{in\dagger}, a_q^{in\dagger}] = 0. \quad (174)$$

また  $f$  は次のように left mover と right mover の成分の和で書くこともできる。

$$\begin{aligned} f &= f_- + f_+ \\ &= \int_0^\infty \frac{d\omega}{\sqrt{2\omega}} [a_\omega^{in} e^{-i\omega x^-} + a_\omega^{in\dagger} e^{i\omega x^-}] \\ &\quad + \int_0^\infty \frac{d\omega}{\sqrt{2\omega}} [a_{-\omega}^{in} e^{-i\omega x^+} + a_{-\omega}^{in\dagger} e^{i\omega x^+}] \end{aligned} \quad (175)$$

過去での真空状態は、 $a_\omega |0in\rangle = 0$  で特徴づけられる。なおこの時空は原点に関して鏡像対称なので、以降 left mover のみを議論すれば十分である。

原点に曲率が存在しているために、未来において  $x$  座標では計量がミンコフスキー計量ではない。従って未来の漸近場 (Out Asymptotic Field) において、 $x$  での平面波

モードで真空を定義することは不適當である。left mover に対しては、かわりに質量源右側でのミンコフスキー座標  $(\sigma_R^+, \sigma_R^-)$  における平面波が自然な OUT モードである。

$$u_{\omega}^{-out} = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} e^{-i\omega\sigma_R^-}. \quad (176)$$

right mover に対しては  $\sigma_L$  座標での平面波を使う。原点右側の未来の真空は

$$f_-(x^1 > 0) = \int_0^\infty d\omega [a_{\omega}^{out} u_{\omega}^{-out} + a_{\omega}^{-out\dagger} u_{\omega}^{-out*}] \quad (177)$$

で定義される消滅演算子  $a_{\omega}^{out}$  を用いて  $a_{\omega}^{out}|0out\rangle = 0$  で特徴づけられる。

OUT モード (176) 式は原点左側において、 $x$  座標を用いて

$$u_{\omega}^{-out} = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (e^{-2\lambda x^-} - e^{-2\lambda x_H})^{\frac{i\omega}{2\lambda}} \Theta(x_H - x^-). \quad (178)$$

と表せる。ここで  $x_H = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{M}{2\lambda}$  であり、 $x^- = x_H$  は原点左側領域の地平線を表す。この OUT モードは左の地平線に落ち込む成分を持たないから (178) 式において  $\Theta(x_H - x^-)$  の因子が現われる。これを IN モード  $u_{\omega}^{-in} = e^{-i\omega x^-}$  で展開すると、

$$\begin{aligned} u_{\omega}^{-out} &= \int_0^\infty d\omega' [\alpha_{\omega\omega'} u_{\omega'}^{-in} + \beta_{\omega\omega'} u_{\omega'}^{-in*}], \\ \alpha_{\omega\omega'} &= \frac{1}{2\pi} (u_{\omega}^{-out}, u_{\omega'}^{-in}), \quad \beta_{\omega\omega'} = -\frac{1}{2\pi} (u_{\omega}^{-out}, u_{\omega'}^{-in*}) \end{aligned} \quad (179)$$

と書ける。ここで  $(, )$  は Klein-Gordon の保存内積；

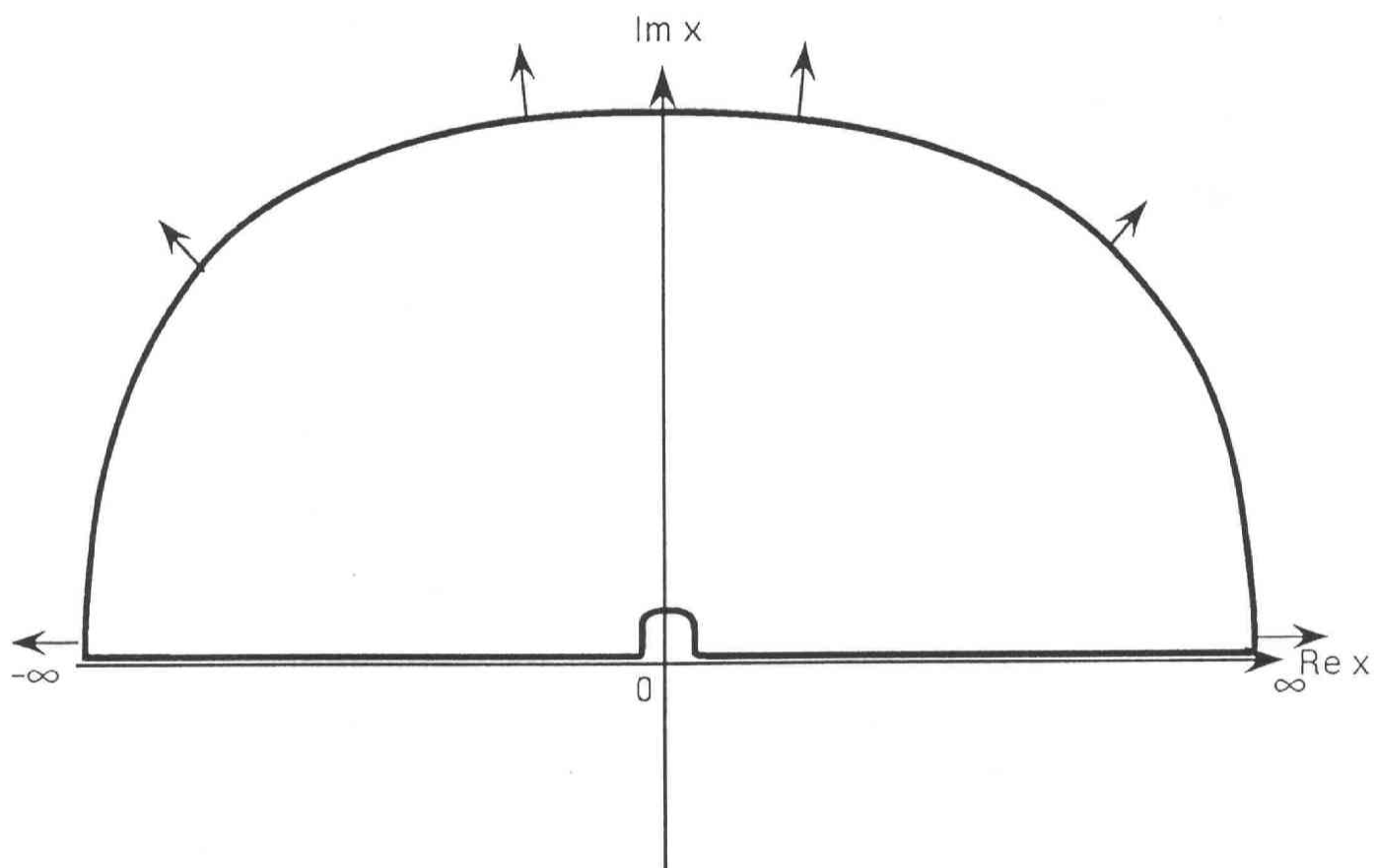
$$(f, g) = -i \int_{\Sigma} d\Sigma^a (f \nabla_a g^* - (\nabla_a f) g^*) \quad (180)$$

である。(180) 式は任意の時間一定面  $\Sigma$  で評価でき、 $\Sigma$  の依存性は持たない。また left mover 成分だけを考慮している時は、 $\Sigma$  を原点左側の  $x^+$  一定面で評価できる。 $\alpha_{\omega\omega'}$  と  $\beta_{\omega\omega'}$  は Bogoliubov 係数と呼ばれる。この係数を使うと、 $a_{\omega}^{-out}$  は

$$a_{\omega}^{-out} = \int_0^\infty d\omega' [\alpha_{\omega\omega'}^* a_{\omega'}^{-in} - \beta_{\omega\omega'}^* a_{\omega'}^{-in\dagger}] \quad (181)$$

と展開される。従って過去に真空状態を用意した時、未来において left mover のエネルギー準位  $\omega \sim \omega + \Delta\omega$  に励起される量子の個数を  $\Delta\omega$  で割った密度は

$$\langle 0in | N_{\omega}^{-out} | 0in \rangle = \langle 0in | \sum_{\omega} a_{\omega}^{-out\dagger} a_{\omega}^{-out} | 0in \rangle = \int_0^\infty d\omega' |\beta_{\omega\omega'}|^2 \quad (182)$$



で評価される。

Bogoliubov 係数  $\alpha_{\omega\omega'}$  と  $\beta_{\omega\omega'}$  を  $x^+$  一定面で評価する式は

$$\alpha_{\omega\omega'} = -\frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u_{\omega}^{-out} \partial_- u_{\omega'}^{-in*} dx^-, \quad (183)$$

$$\beta_{\omega\omega'} = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u_{\omega}^{-out} \partial_- u_{\omega'}^{-in} dx^-. \quad (184)$$

と与えられ、内積の性質から  $x^+$  依存性を持たない。具体形は

$$\alpha_{\omega\omega'} = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\omega'}{\omega} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^0 (e^{-2\lambda x} - 1)^{\frac{i\omega}{2\lambda}} e^{i\omega' x} dx, \quad (185)$$

$$\beta_{\omega\omega'} = e^{-2i\omega x_H} \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\omega'}{\omega} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^0 (e^{-2\lambda x} - 1)^{\frac{i\omega}{2\lambda}} e^{-i\omega' x} dx. \quad (186)$$

と書かれる。なおここで  $x^- = x + x_H$  という積分変数の変換を行っている。次に  $\alpha_{\omega\omega'}$  に関して積分経路の変更を行なう。図 13 の複素積分経路を考えると、被積分関数が上半面で正則であることから、積分値は 0 である。また無限遠方の弧状経路からの寄与がないことも保証されることから (185) 式の  $-\infty$  から 0 の定積分は 0 から  $\infty$  の定積分に書き換えることができる。その後、更に  $x \rightarrow -x$  という変換を行なうと

$$\alpha_{\omega\omega'} = -e^{\frac{\omega\pi}{2\lambda}} \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\omega'}{\omega} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^0 (1 - e^{2\lambda x})^{\frac{i\omega}{2\lambda}} e^{-i\omega' x} dx \quad (187)$$

という表式が得られる。

(187) 式と (186) 式の積分は地平線が形成される前からの寄与と地平線がほぼ完成した後の寄与からなっている。地平線の位置は  $x = 0$  にあたる。なお  $\int_{-\infty}^x e^{\rho(x^-)} dx^- = \int^x e^{\rho(x+x_H)} dx$  は  $x \rightarrow -0$  で発散している。従って (187) 式と (186) での、地平線がほぼ完成してから無限の未来までの寄与は  $x \sim 0$  の座標領域に集中している。地平線がほぼ完成してからどのような輻射が放射されているかをみる為に、Hawking[1] に従って被積分関数の  $(1 - e^{2\lambda x})^{\frac{i\omega}{2\lambda}}$  を  $x = 0$  での展開の 1 次  $(-2\lambda x)^{\frac{i\omega}{2\lambda}}$  で置き換える近似をおこなう。これは過去から未来にかけて地平線が存在しているという近似であり、地平線形成以前の寄与を取り除く働きをしている。

$$\alpha_{\omega\omega'} \sim -e^{\frac{\omega\pi}{2\lambda}} \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\omega'}{\omega} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^0 (-2\lambda x)^{\frac{i\omega}{2\lambda}} e^{-i\omega' x} dx, \quad (188)$$



$$\beta_{\omega\omega'} \sim e^{-2i\omega x_H} \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^0 (-2\lambda x)^{\frac{i\omega}{2\lambda}} e^{-i\omega'x} dx. \quad (189)$$

(188)、(189) 式からは

$$|\alpha_{\omega\omega'}|^2 = e^{\frac{\omega x}{\lambda}} |\beta_{\omega\omega'}|^2 \quad (190)$$

という関係が示せる。一方 Bogoliubov 係数の完全性の性質；

$$\int_0^\infty d\omega' (\alpha_{\omega\omega'} \alpha_{\omega''\omega'}^* - \beta_{\omega\omega'} \beta_{\omega''\omega'}^*) = \delta(\omega - \omega'') \quad (191)$$

から

$$\int_0^\infty d\omega' (|\alpha_{\omega\omega'}|^2 - |\beta_{\omega\omega'}|^2) = t (= \delta(0)) \quad (192)$$

という関係が成り立つ。(190) 式を (192) 式に代入すると、

$$\langle invac | N_{out}^\omega | invac \rangle = \int_0^\infty d\omega' |\beta_{\omega\omega'}|^2 \sim t \frac{1}{e^{\frac{\omega x}{\lambda}} - 1}. \quad (193)$$

という最終結果が得られる。

ここで  $t$  は large time cutoff である。cutoff 自体は近似をしていない (186) 式においても必要であり、近似のために現われた訳ではない。(186) 式はベータ関数を使うと、

$$\beta_{\omega\omega'} = \frac{e^{-2i\omega x_H}}{4\pi\lambda} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} B\left(-i\frac{\omega + \omega'}{\lambda}, 1 + i\frac{\omega}{\lambda}\right) \quad (194)$$

と表せる。これから  $\omega' \sim \infty$  において  $|\beta_{\omega\omega'}|^2 \propto \omega'$  と振るまう。従って  $\int_0^\infty |\beta_{\omega\omega'}|^2 d\omega'$  は発散している。この cutoff  $t$  は未来にかけての無限時間ワームホールが輻射を出し続けるために現われている。

(193) 式は、ワームホールからの輻射のエネルギー Spektrum がプランク分布をしており、その Hawking 温度は  $T_H = \lambda/\pi$  であることを示している。CGHS 理論でのブラックホールの温度の場合と同様に、Hawking 温度がワームホールの質量  $M$  に依存していない。

またエネルギー運動量テンソルも熱的輻射のスペクトラム (193) と整合する [25]。量子輻射のエネルギー運動量テンソルを Polyakov 作用を計量で変分して得られる評価式

$$\langle T_{x_-, x_-} \rangle = -\frac{1}{12\pi}(\partial_-^2 \rho - (\partial_- \rho)^2 + t_-(x^-)) \quad (195)$$

で計算する。 $x$  座標では  $x^- \rightarrow -\infty$  (Past Null Infinity) において  $\rho \propto e^{2\lambda x^-} \rightarrow 0$  である。従って過去にフラックスがないという条件は (195) 式において

$$t_-(x^-) = 0. \quad (196)$$

である。この境界条件のもとで原点右側におけるフラックスをミンコフスキー座標  $(\sigma_R^+, \sigma_R^-)$  において評価すると、(167) 式と (195) 式から

$$\langle T_{\sigma_R^-, \sigma_R^-} \rangle = \left[ \frac{\partial x^-}{\partial \sigma_R^-} \right]^2 \langle T_{x_-, x_-} \rangle = -\frac{\lambda^2}{12\pi} \frac{1 + \frac{4\lambda}{M} e^{-2\lambda \sigma_R^-}}{(1 + \frac{2\lambda}{M} e^{-2\lambda \sigma_R^-})^2}. \quad (197)$$

が得られる。つまり質量源から輻射が放射されている。注目されるべきは、地平線と質量源が重なる無限の未来 ( $x^0 \rightarrow \infty$ ) において一定のフラックス；

$$\langle T_{\sigma_R^-, \sigma_R^-} \rangle \rightarrow -\frac{\lambda^2}{12\pi}. \quad (198)$$

が放射され、これが温度  $T_H = \lambda/\pi$  の熱的輻射と解釈できる点である。温度  $T_H = \lambda/\pi$  での黒体輻射のエネルギー密度は

$$\rho_{\text{thermal}} = \frac{\pi}{12} T^2 = \frac{\lambda^2}{12\pi} \quad (199)$$

である。 $\langle T_{\sigma_R^+, \sigma_R^+} \rangle = \langle T_{\sigma_R^+, \sigma_R^-} \rangle = 0$  を使うと、 $\langle T_{\sigma_R^-, \sigma_R^-} \rangle = -\rho_{\text{thermal}}$  が示されて、(198) 式が再現される。

またここで強調したいのは、Hawking 輻射 (198) 式が  $x^- \rightarrow x_H - 0$  において計量 (167) 式の示す地平線構造：

$$e^{2\rho} \sim \frac{1}{2\lambda(x_H - x^-)} \quad (200)$$

と初期条件だけに依存しているということである。これをみるために、過去には平坦で未来には (200) 式のふるまいをする次の一般的な計量を考える。

$$ds^2 = -\Omega(x^+, x^-) dx^+ dx^-, \quad (201)$$

$$\Omega(x^+, x^- \rightarrow -\infty) = \Omega(x^+ \rightarrow -\infty, x^-) = 1, \quad (202)$$

$$\Omega(x^+, x^- \rightarrow x_H - 0) \sim \frac{1}{2\lambda(x_H - x^-)} \quad \text{for } x^1 > 0. \quad (203)$$

初期にフラックスがないという条件は、(202) 式を課していることから (195) 式において  $t_{\pm} = 0$  で表現される。また (203) 式を用いて  $x^- = x_H$  近傍でのミンコフスキー座標  $(\sigma^+, \sigma^-)$  が

$$\begin{aligned} \sigma^+ &= x^+, \\ \sigma^- &= \int \Omega dx^- \end{aligned} \quad (204)$$

で定義できる。(195) 式 (204) 式を使うと、この座標に対するエネルギー運動量テンソルが

$$\langle T_{\sigma^-, \sigma^-} \rangle = -\frac{1}{48\pi\Omega^2} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^{-2}} \ln \Omega - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x^-} \ln \Omega \right)^2 \right] \quad (205)$$

と書き下せる。これに (203) 式を代入して  $x^- \rightarrow x_H - 0$  の極限をとると、

$$\langle T_{\sigma^-, \sigma^-} \rangle \rightarrow -\frac{\lambda^2}{12\pi} \quad (206)$$

が得られ、(198) 式と全く同じ結論に至る。従って Hawking 輻射 (198) 式は地平線が形成される途中の過程にはよらないという意味で普遍的である。

また輻射 (198) 式にはワームホールの質量依存性がなかったが、この状況は前章の図 12 のような複数個の局在質量源がつくるワームホールでも変らない。例えば過去に距離  $l$  の間隔をあけて置かれた 2 つの質量源がつくるワームホールを考える。左側の質量源は質量  $M_L$  をもち、右側は質量  $M_R$  をもつとする。このワームホールが右側の領域に出すフラックスは、右側領域のミンコフスキー座標  $\sigma_R$  において

$$\langle T_{\sigma_R^-, \sigma_R^-} \rangle = \langle T_{\sigma_R^-, \sigma_R^-}^R \rangle + \langle T_{\sigma_R^-, \sigma_R^-}^L \rangle, \quad (207)$$

$$\langle T_{\sigma_R^-, \sigma_R^-}^R \rangle = -\frac{\lambda^2}{12\pi} \frac{1 + \frac{4\lambda}{M_R} e^{-2\lambda\sigma_R^-}}{\left(1 + \frac{2\lambda}{M_R} e^{-2\lambda\sigma_R^-}\right)^2}, \quad (208)$$

$$\langle T_{\sigma_R^-, \sigma_R^-}^L \rangle = -\frac{\lambda^2}{12\pi} \frac{e^{-4\lambda\sigma_R^-} \left[1 + \frac{2M_R}{M_L} e^{2\lambda l} + \frac{4\lambda}{M_R} e^{2\lambda l} e^{-2\lambda\sigma_R^-}\right]}{\left[\frac{M_R}{2\lambda} + e^{-2\lambda\sigma_R^-}\right]^2 \left[1 + \frac{M_R}{M_L} e^{2\lambda l} + \frac{2\lambda}{M_L} e^{2\lambda l} e^{-2\lambda\sigma_R^-}\right]^2} \quad (209)$$

と評価される。ここで  $\sigma_R^0 \rightarrow -\infty$  において右側の質量源が  $\sigma_R^1 = 0$  に位置するように、座標  $\sigma_R$  の原点を決めてある。 $\langle T_{\sigma_R^-, \sigma_R^-}^R \rangle$ 、 $\langle T_{\sigma_R^-, \sigma_R^-}^L \rangle$  は、それぞれ右側、左側の質量

源の寄与である。 $\sigma_R^- \rightarrow \infty$  において残るのは観測側に近い右側の寄与だけで、左側の質量源からのフラックスは右の質量源を横切る時に無限大の赤方変移をうける結果として消えてしまう。結局1つの質量源の場合の(198)式と同じフラックスがHawking輻射として観測される。従って  $M_L$ 、 $M_R$ 、 $l$  の依存性は現れない。この結果は任意個数の質点源からワームホールを形成した場合でも変わらない。

Reversed RST 理論では、ワームホールのHawking輻射の議論においてPolyakov作用を用いた理論と同じ結果を出す。Reversed RST 理論でのエネルギー運動量テンソルの量子補正は

$$\langle T_{+-} \rangle = \frac{\kappa}{2\pi} \partial_+ \partial_- (2\rho - \phi), \quad (210)$$

$$\langle T_{\pm\pm} \rangle = -\frac{\kappa}{\pi} [\partial_{\pm}^2 \rho - (\partial_{\pm} \rho)^2 - \frac{1}{2} \partial_{\pm}^2 \phi + \partial_{\pm} \rho \partial_{\pm} \phi + t_{\pm}(x^{\pm})] \quad (211)$$

で与えられる。(210)式、(211)式を用いてワームホール時空でのフラックスを評価することができる。過去には  $\rho = o(e^{2\lambda x^-}) \sim 0$ 、 $\phi = \lambda x^0 + o(e^{2\lambda x^-})$  であるので、新しく現われた(211)式中の第3項、第4項は寄与を与えない。従ってPolyakov作用を用いた場合と同様、フラックスが過去にはない条件は  $t_{\pm} = 0$  と表される。また  $x^{\pm} \rightarrow \infty$  においても(211)式の第3項、第4項は消える。また(210)式の第2項も未来では消えている。従ってフラックスはもとのPolyakov項の理論と変わらない。量子効果の反作用を取り入れない解析の段階では、Reversed RST 理論はHawking輻射の物理においてPolyakov作用だけを用いた理論と同じ universality class に属している。

これらの議論によりワームホールから定常的にHawking輻射が出ていることが示された。但しここで強調すべきなのは、あくまで輻射放出が時空へ与える反作用を取り入れていない解析における結論である事である。反作用を考慮すると、ワームホールから輻射がエネルギーを持ち出すことから、ワームホールの地平線は古典論で示された所よりも後退することなどの現象が予想される。ワームホールの最終状態の解析にも反作用を取り入れることは必須である。また始めから反作用を考慮した時間発展を考慮すると地平線自身が形成されるかどうかとも自明ではない。また反作用をとりいれてもHawking輻射の熱的振る舞いが変化しないかどうかとも不明である。これらの問題を解析するため次章ではReversed CGHS理論における物質場の量子補正の反作用を議論する。

## 5 物質場の量子効果がワームホールに与える反作用

### 5.1 概論

この節では、前章のワームホールに量子効果が与える反作用の解析の基本的な定式化を行なう。

量子効果の具体的取扱いは Reversed RST 理論の枠内で行なう。つまり量子効果の対する有効作用を

$$S_{RST} = -\frac{\kappa}{8\pi} \int d^2x \sqrt{-g} [R \frac{1}{\nabla^2} R + 2\phi R] \quad (212)$$

で導入する。これを局在した古典的質量源を伴った古典論の作用に加え、変分してやると、次の運動方程式が得られる。

$$\partial_+ \partial_- (e^{-2\phi} + \frac{\kappa}{2}\phi - \kappa\rho) - \lambda^2 e^{2\rho-2\phi} = -\frac{M}{4} e^\rho \delta(x^1), \quad (213)$$

$$(1 + \frac{\kappa}{4} e^{2\phi}) \partial_+ \partial_- (\rho - \phi) = \frac{M}{8} e^{\rho+2\phi} \delta(x^1), \quad (214)$$

$$\begin{aligned} & \partial_\pm^2 (e^{-2\phi} + \frac{\kappa}{2}\phi - \kappa\rho) + \partial_\pm (\rho - \phi) \partial_\pm (-2e^{-2\phi} + \kappa\rho) \\ &= \frac{M}{4} e^\rho \delta(x^1). \end{aligned} \quad (215)$$

方程式 (213)、(214)、(215) の解で原点に対する鏡像対称性をもつものは、ゲージ自由度を使って一般性を失わずに、

$$\rho - \phi = -\lambda x^0 + \frac{1}{2} F(x^0 - |x^1|), \quad (216)$$

$$\begin{aligned} & e^{-2\phi} + \frac{\kappa}{2}\phi - \kappa\rho \\ &= \frac{\kappa}{4} \lambda (x^0 + |x^1|) + C_0 + C_+ e^{-\lambda(x^0+|x^1|)} \\ &+ \lambda C_- \int_{t_i}^{x^0-|x^1|} e^{F-\lambda t} dt - \lambda e^{-\lambda(x^0+|x^1|)} \int_{t_i}^{x^0-|x^1|} e^{F-\lambda t} dt \\ &+ \frac{\kappa}{4} \int_{t_i}^{x^0-|x^1|} dx e^{F(x)-\lambda x} \int_{t_i}^x dy e^{-F(y)+\lambda y} (\dot{F}(y) - \lambda)^2. \end{aligned} \quad (217)$$

と書ける。これらは原点以外ではすでに (213) ~ (215) 式を厳密に満たしているが、原点直上に関しては次の条件を満たさなければ解ではない。

$$\bar{\rho} - \bar{\phi} = -\lambda t + \frac{1}{2} F(t), \quad (218)$$

$$\begin{aligned}
& e^{-2\bar{\phi}} - \frac{\kappa}{2}\bar{\phi} \\
&= C_0 + C_+ e^{-\lambda t} - \lambda e^{-\lambda t} \int_{t_i}^t e^{F(x)-\lambda x} dx \\
&+ \lambda C_- \int_{t_i}^t e^{F(x)-\lambda x} dx + \frac{\kappa}{2} F(t) - \frac{3\kappa}{4} \lambda t \\
&+ \frac{\kappa}{4} \int_{t_i}^t dx e^{F(x)-\lambda x} \int_{t_i}^x dy e^{-F(y)+\lambda y} (\dot{F}(y) - \lambda)^2, \tag{219}
\end{aligned}$$

$$\dot{F} = \frac{dF}{dt} = \frac{M}{2} \frac{e^{3\bar{\phi} + \frac{1}{2}F - \lambda t}}{1 + \frac{\kappa}{4} e^{2\bar{\phi}}}, \tag{220}$$

$$\begin{aligned}
& \lambda^2 \int_{t_i}^t e^{F(x)-\lambda x} dx + \lambda e^{F(t)-\lambda t} + \frac{\kappa}{4} e^{\lambda t} - C_+ \lambda - C_- \lambda e^F \\
& - \frac{\kappa}{4} e^{F(t)} \int_{t_i}^t (\dot{F}(x) - \lambda)^2 e^{-F(x)+\lambda x} dx \\
&= \frac{M}{2} e^{\bar{\phi} + \frac{1}{2}F}. \tag{221}
\end{aligned}$$

ここで  $\bar{\rho}$ 、 $\bar{\phi}$  は  $\bar{\rho}(t) = \rho(x^0 = t, x^1 = 0)$ 、 $\bar{\phi}(t) = \phi(x^0 = t, x^1 = 0)$  であり、(218) 式と (219) 式は (216) 式 (217) 式において  $x^1 = 0$  としたもので得られる。(220) 式は (214) 式において  $\delta(x^1)$  に比例する項の係数比較から得られ、(221) 式は (213) 式 (215) 式から同様の操作で抜き出されたものである。

ワームホール時空に対する具体的な解析の前に、方程式系の構造を一般的に理解しておくことは有用である。必要最小限の閉じた方程式系は (219) 式 (220) 式 (221) 式の 3 本の方程式からなる。方程式の構造として重要なことは (219) 式が (220) 式 (221) 式に対して第 1 種の constraint 方程式になっている事である。つまり、(219) 式の微分が (220) 式と (221) 式から導くことができる。このため (219) 式は全ての時刻  $t$  に対して解く必要はなくなり、ある任意固定の時刻  $t = t_i$  において解ければ十分である。即ち

$$e^{-2\bar{\phi}(t_i)} - \frac{\kappa}{2}\bar{\phi}(t_i) = C_0 + C_+ e^{-\lambda t_i} + \frac{\kappa}{2} F(t_i) - \frac{3\kappa}{4} t_i \tag{222}$$

を満たすだけでよい。

(219) 式が constraint であることは次のように証明できる。まず (219) 式を微分す

ると

$$\begin{aligned}
& (-2e^{-2\bar{\phi}} - \frac{\kappa}{2})\dot{\bar{\phi}} \\
= & -\lambda C_+ e^{-\lambda t} + \frac{\kappa}{2}(\dot{F} - \frac{3}{2}\lambda) + \lambda C_- e^{F-\lambda t} - \lambda e^{F-2\lambda t} \\
& + \lambda^2 e^{-\lambda t} \int_{t_i}^t e^{F-\lambda x} dx \\
& + \frac{\kappa}{4} e^{F-\lambda t} \int_{t_i}^t (\dot{F} - \lambda)^2 e^{-F+\lambda x} dx
\end{aligned} \tag{223}$$

がでてくる。これが(220)式と(221)式から導かれればよい。まず(221)式を(223)式の右辺第6項目に代入すると、

$$\begin{aligned}
& (-2e^{-2\bar{\phi}} - \frac{\kappa}{2})\dot{\bar{\phi}} \\
= & \frac{M}{2} e^{\bar{\phi} + \frac{F}{2} - \lambda t} + \frac{\kappa}{2}(\dot{F} - \frac{3}{2}\lambda) + 2\lambda C_- e^{F-\lambda t} - 2\lambda e^{F-2\lambda t} \\
& + \frac{\kappa}{2} e^{F-\lambda t} \int_{t_i}^t (\dot{F} - \lambda)^2 e^{-F+\lambda x} dx
\end{aligned} \tag{224}$$

と変形される。次に(221)式の微分から得られる

$$\begin{aligned}
& \frac{\kappa}{4} e^F \int_{t_i}^t (\dot{F} - \lambda)^2 e^{-F+\lambda x} dx \\
= & \frac{1}{\dot{F}} (\lambda \frac{d}{dt} + \lambda^2) e^{F-\lambda t} - \frac{\kappa}{4} (\dot{F} - \frac{3}{2}\lambda) e^{\lambda t} \\
& - \lambda C_- e^F - \frac{M}{2\dot{F}} \frac{d}{dt} e^{\bar{\phi} + \frac{F}{2}}
\end{aligned} \tag{225}$$

という関係式を(224)式の右辺第5項目に代入してやると、

$$(-2e^{-2\bar{\phi}} - \frac{\kappa}{2})\dot{\bar{\phi}} = -M e^{\bar{\phi} + \frac{F}{2} - \lambda t} \frac{\dot{\bar{\phi}}}{\dot{F}} \tag{226}$$

と変形される。これを整理すると(220)式と等価であることが分り、(219)式の微分は(220)式(221)式から導かれることが証明された。

(219)式がconstraintであることを使うと、最終的に解くべき方程式は単調増加関数  $F(t)$  の3階微分方程式に帰着される。まず(220)式を書き換えると

$$e^{-3\bar{\phi}} + \frac{\kappa}{4} e^{-\bar{\phi}} = \frac{M}{2\dot{F}} e^{\frac{F}{2} - \lambda t} \tag{227}$$

が得られるが、この左辺の正定値性から  $\dot{F} > 0$  が要求される。また (227) 式は  $e^{-\bar{\phi}}$  に関して 3 次方程式になっており、次のように  $e^{-\bar{\phi}}$  を  $F$  で解くことができる。

$$e^{-\bar{\phi}} = \left[ \frac{1}{2} \left( \sqrt{H^2 + \frac{\kappa^3}{432}} + H \right) \right]^{\frac{1}{3}} - \left[ \frac{1}{2} \left( \sqrt{H^2 + \frac{\kappa^3}{432}} - H \right) \right]^{\frac{1}{3}}, \quad (228)$$

$$H = \frac{M}{2\dot{F}} e^{\frac{1}{2}F - \lambda t}. \quad (229)$$

また (219) 式は (222) 式に置き変り、 $C_0$  は

$$C_0 = -C_+ e^{-\lambda t_i} + e^{-2\bar{\phi}(t_i)} - \frac{\kappa}{2} \bar{\phi}(t_i) - \frac{\kappa}{2} F(t_i) + \frac{3}{4} \kappa t_i \quad (230)$$

と書ける。また (221) 式とその微分式において  $t = t_i$  とおくと

$$C_+ = \frac{\kappa}{4\lambda} e^{\lambda t_i} (\dot{F}(t_i) - \lambda) - \frac{M}{2\lambda} e^{\bar{\phi}(t_i) + \frac{1}{2}F(t_i)} + \frac{M}{2\lambda} \left[ \frac{\bar{\phi}(t_i)}{\dot{F}(t_i)} + \frac{1}{2} \right] e^{\bar{\phi}(t_i) + \frac{1}{2}F(t_i)} \quad (231)$$

$$C_- = e^{-\lambda t_i} - \frac{\kappa}{4\lambda} e^{-F(t_i) - \lambda t_i} (\dot{F}(t_i) - 2\lambda) - \frac{M}{2\lambda} \left[ \frac{\bar{\phi}(t_i)}{\dot{F}(t_i)} + \frac{1}{2} \right] e^{\bar{\phi}(t_i) - \frac{1}{2}F(t_i)} \quad (232)$$

が得られ、 $C_0$ 、 $C_+$ 、 $C_-$  は  $F$  を与えると決まる。最終的に (221) 式を 2 階微分して得られる  $F$  を定める方程式は

$$\lambda^2 e^{F-2\lambda t} + \frac{\kappa}{4} (\ddot{F} + \lambda \dot{F} - \lambda^2) + \frac{M}{2} e^{F-\lambda t} \frac{d}{dt} \left[ \frac{e^{-F}}{\dot{F}} \frac{d}{dt} e^{\bar{\phi} + \frac{1}{2}F} \right] = 0 \quad (233)$$

で与えられる。これは  $F$  に関して  $t$  の 3 階微分方程式である。

(233) 式が解ければ全てがわかるが、大変複雑な方程式で扱いにくい。そこでまず  $\kappa$  と  $M$  に対する摂動を各々試みた後に (233) 式の解析にもどることにする。

## 5.2 $\kappa$ に関する摂動

ワームホールの質量  $M$  が大きく、量子効果の大きさ  $\kappa$  が非常に小さい時には、反作用を取り入れても誘導される変化は少しずつしか起こらず、摂動として扱えるという状況が期待される。そこでこの節では運動方程式の  $\kappa$  の摂動展開を以下で試みる。その結果として、曲率や重力質量の減少が見い出される。また熱的な Hawking 輻射の描像も短期間に局所的な領域でのみ有効であることが述べられる。反作用が Hawking



輻射に及ぼす補正は常に逆符号の寄与で与えられ、輻射を止める傾向に働いていることも示される。

ワームホール古典解：

$$e^F = \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha^2 e^{2\lambda t}}}, \quad (234)$$

$$e^{2\bar{\phi}} = e^{2\lambda x^0 + F} \quad (235)$$

$(\alpha^2 = \frac{M}{2\lambda})$  からの  $\kappa$  に対する 1 次の摂動を考える。(119) 式、(123) 式で導入された

$$G = \int_0^t e^{F-\lambda t} dt, \quad (236)$$

$$O = e^{2\bar{\phi}+F} \quad (237)$$

という量に対する  $\kappa$  の 1 次の摂動  $\delta G$ 、 $\delta O$  に関して方程式をたてると、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \delta O^{-1} = & \frac{\kappa \lambda}{2} e^{2\bar{\phi}-2\lambda t} + \frac{\kappa}{2\alpha^2 \lambda} O^{-\frac{3}{2}} (\dot{F}^2 - 2\lambda \dot{F}) e^{\lambda t} \\ & + \frac{\kappa}{2\alpha^2 \lambda} \dot{F} e^F O^{-\frac{3}{2}} \int_0^t (\dot{F} - \lambda)^2 e^{-F+\lambda x} dx \end{aligned} \quad (238)$$

$$\begin{aligned} \delta \dot{G} + \lambda \delta G = & \delta C_+ - \frac{\kappa}{4} e^{\lambda t} - \frac{\alpha^2}{2} O^{\frac{3}{2}} \delta O^{-1} \\ & + \frac{\kappa}{4\lambda} e^F \int_0^t (\dot{F} - \lambda)^2 e^{-F+\lambda x} dx \end{aligned} \quad (239)$$

が得られる。また  $t_i = 0$  とした (222) 式からは境界条件

$$\delta C_+ + \delta C_- = \dot{G}(0) \delta O^{-1}(0) + O^{-1}(0) \delta \dot{G}(0) - \frac{\kappa}{2} (F(0) + \bar{\phi}(0)) \quad (240)$$

が得られる。

ワームホール古典解を (238) 式の左辺に代入して、積分すると  $\delta O^{-1}$  が得られ、その結果を (239) 式の左辺第 3 項に代入すると、 $\delta G$  が得られる。これに  $G$  の定義からくる  $\delta G(0) = 0$  という条件と、各摂動が無限の過去と無限遠方においては消えている条件と (240) 式を課すと解は一意的に定まる。その結果として与えられる  $\rho$  と  $\phi$  に対する摂動は

$$\delta \rho = \frac{\kappa}{4} \left[ e^{2\lambda x^0} \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha^2 e^{2\lambda(x^0 - |x^1|)}}} - \frac{\arcsin(\alpha e^{\lambda(x^0 - |x^1|)})}{\alpha e^{\lambda(x^0 - |x^1|)}} + \frac{\ln(1 - \alpha^2 e^{2\lambda(x^0 - |x^1|)})}{\sqrt{1 - \alpha^2 e^{2\lambda(x^0 - |x^1|)}}} \right] \right]$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{e^{2\lambda(x^0-|x^1|)}}{\sqrt{1-\alpha^2 e^{2\lambda(x^0-|x^1|)}}} \ln(1-\alpha^2 e^{2\lambda(x^0-|x^1|)}) \\
& + \frac{e^{2\lambda(x^0-|x^1|)}}{1-\alpha^2 e^{2\lambda(x^0-|x^1|)}} \\
& - \frac{e^{2\lambda(x^0-|x^1|)}(\alpha e^{\lambda(x^0-|x^1|)} + \frac{1}{\alpha e^{\lambda(x^0-|x^1|)}})}{1-\alpha^2 e^{2\lambda(x^0-|x^1|)}} \arcsin(\alpha e^{\lambda(x^0-|x^1|)}), \quad (241)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta\phi = \frac{\kappa}{4} \bigg[ & e^{2\lambda x^0} \left[ \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2 e^{2\lambda(x^0-|x^1|)}}} - \frac{\arcsin(\alpha e^{\lambda(x^0-|x^1|)})}{\alpha e^{\lambda(x^0-|x^1|)}} + \frac{\ln(1-\alpha^2 e^{2\lambda(x^0-|x^1|)})}{\sqrt{1-\alpha^2 e^{2\lambda(x^0-|x^1|)}}} \right] \\
& + \frac{1-\frac{\alpha^2}{2} e^{2\lambda(x^0-|x^1|)}}{\alpha^2(1-\alpha^2 e^{2\lambda(x^0-|x^1|)})} - \frac{e^{\lambda(x^0-|x^1|)} \arcsin(\alpha e^{\lambda(x^0-|x^1|)})}{\alpha(1-\alpha^2 e^{2\lambda(x^0-|x^1|)})} \\
& - \frac{1}{\alpha^2 \sqrt{1-\alpha^2 e^{2\lambda(x^0-|x^1|)}}} - \frac{\ln(1-\alpha^2 e^{2\lambda(x^0-|x^1|)})}{\alpha^2 \sqrt{1-\alpha^2 e^{2\lambda(x^0-|x^1|)}}} \bigg] \quad (242)
\end{aligned}$$

となる。

反作用まで取り入れた時の(96)式における有効重力定数  $G_{eff}$  を用いてワームホールの有効重力質量を

$$\begin{aligned}
M(x^0) &= G_{eff} M \\
&= \frac{e^{2\bar{\phi}}}{(1+\frac{\kappa}{4}e^{2\bar{\phi}})^2} M \quad (243)
\end{aligned}$$

で定義すると、これに対する摂動は(242)式から次のように書ける。

$$\begin{aligned}
& \delta M(x^0) \\
&= \frac{\kappa M(x^0)}{2\alpha^2} \left[ \frac{1-\frac{1}{2}\alpha^2 e^{2\lambda x^0}}{1-\alpha^2 e^{2\lambda x^0}} (1-2\alpha e^{\lambda x^0} \arcsin(\alpha e^{\lambda x^0})) \right. \\
& \quad \left. - \sqrt{1-\alpha^2 e^{2\lambda x^0}} [1+\ln(1-\alpha^2 e^{2\lambda x^0})] - \frac{\alpha^2 e^{2\lambda x^0}}{\sqrt{1-\alpha^2 e^{2\lambda x^0}}} \right]. \quad (244)
\end{aligned}$$

ここで  $M(x^0) = M e^{2\lambda x^0}$  である。 $\delta M$  は常に負であり、時間に対して単調減少している。 $\lambda=1$ 、 $\alpha=1$ 、 $M=2$  の時  $\delta M/\kappa$  の  $x^0$  に対する振る舞いを図14に示す。

また(241)式から計算される原点直上での曲率に対する摂動は

$$\delta \hat{R} = \frac{\kappa}{2\alpha^2} \hat{R} \xi(x^0)$$

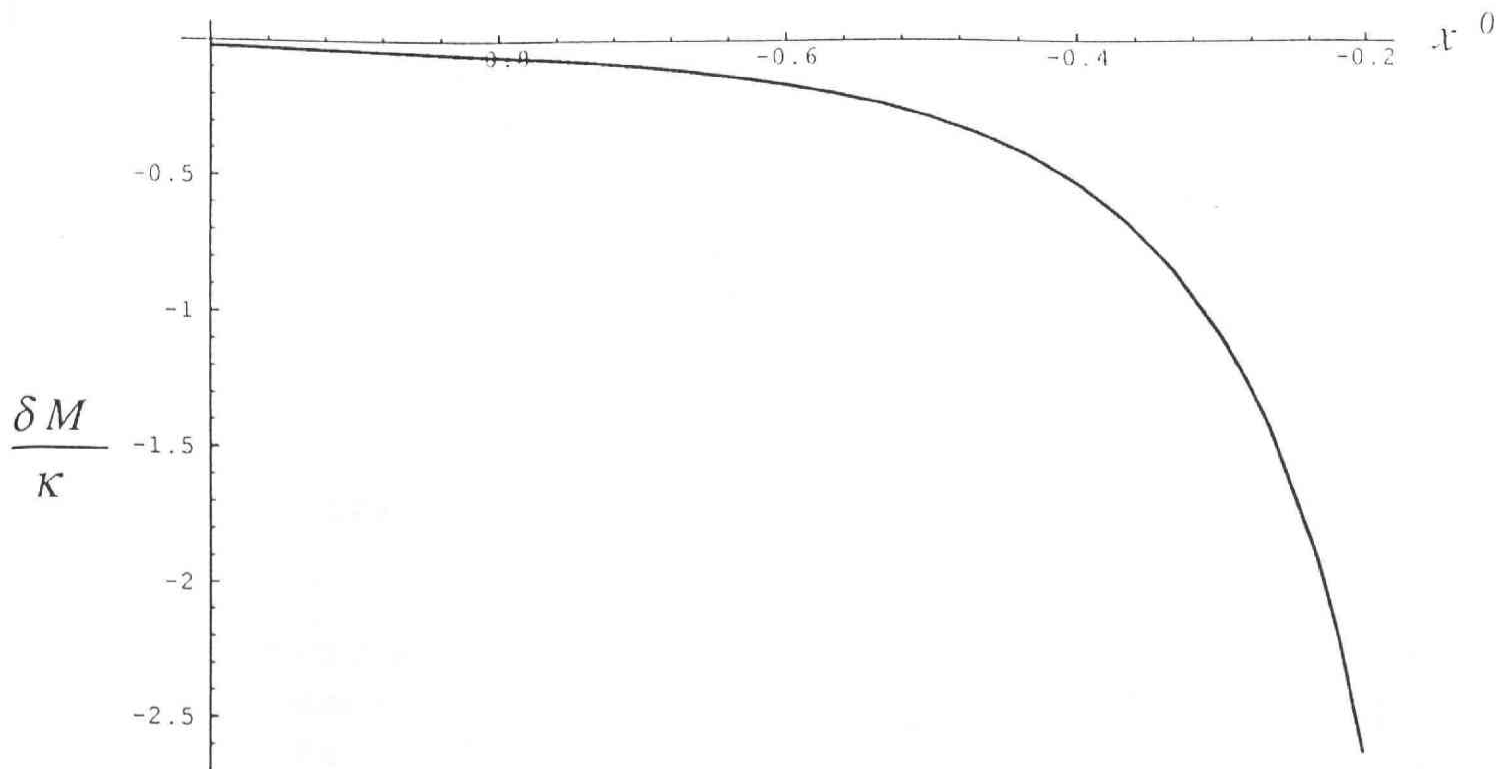


图 14

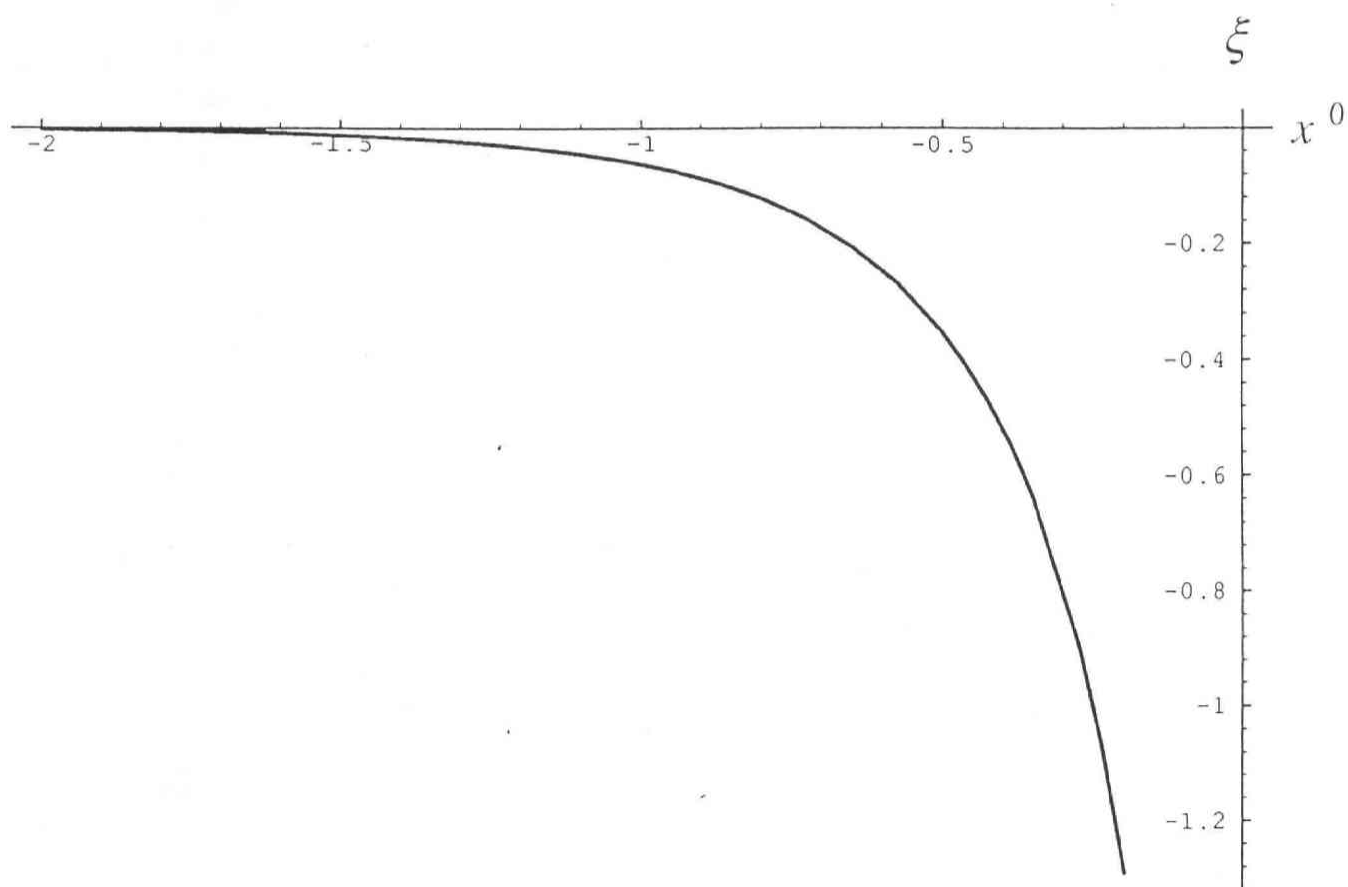


图 15

$$\begin{aligned}\xi = & [1 - [1 + \ln(1 - \alpha^2 e^{2\lambda x^0})] \sqrt{1 - \alpha^2 e^{2\lambda x^0}} \\ & - \frac{3\alpha^2}{2} \frac{e^{2\lambda x^0}}{\sqrt{1 - \alpha^2 e^{2\lambda x^0}}} \\ & - \alpha e^{\lambda x^0} \arcsin(\alpha e^{2\lambda x^0})] \end{aligned} \quad (245)$$

と与えられる。ここで  $\hat{R}$  は背景の曲率

$$\hat{R} = 2M e^{2\lambda x^0} \delta(x^1) \quad (246)$$

である。 $\delta R$  は時間とともに単調減少であり、また常に負の値をとる。図 15 に  $\alpha = 1$  の時の  $\xi(x^0)$  の振るまいを示す。従って背景の曲率を時間とともに打ち消すふるまいをする。これはワームホールが輻射放出によって重力質量を減らし、曲率を減少させていると解釈できる。このため地平線がたとえ形成されても、古典論で予想される位置より後退した所に現われることを示唆する。

摂動のふるまいをみる時は、背景の計量が平坦になる  $\sigma_R$  座標を使うと物理的に理解しやすい。但し以降では簡単のため添え字の  $R$  を省いた座標表示を用いる。(241) 式と (242) 式を座標変換してやると

$$\begin{aligned}\delta\rho = & \frac{\kappa}{4} [e^{2\lambda\sigma^0} [1 - \ln(1 + \alpha^2 e^{2\lambda\sigma^-}) - \frac{1}{\alpha} e^{-\lambda\sigma^-} \arcsin(\frac{\alpha e^{\lambda\sigma^-}}{\sqrt{1 + \alpha^2 e^{2\lambda\sigma^-}}})] \\ & + e^{2\lambda\sigma^-} \frac{\ln(1 + \alpha^2 e^{2\lambda\sigma^-})}{\sqrt{1 + \alpha^2 e^{2\lambda\sigma^-}}} + e^{2\lambda\sigma^-} \\ & - e^{2\lambda\sigma^-} \frac{\alpha e^{\lambda\sigma^-}}{\sqrt{1 + \alpha^2 e^{2\lambda\sigma^-}}} \arcsin(\frac{\alpha e^{\lambda\sigma^-}}{\sqrt{1 + \alpha^2 e^{2\lambda\sigma^-}}}) \\ & - e^{2\lambda\sigma^-} \frac{\sqrt{1 + \alpha^2 e^{2\lambda\sigma^-}}}{\alpha e^{\lambda\sigma^-}} \arcsin(\frac{\alpha e^{\lambda\sigma^-}}{\sqrt{1 + \alpha^2 e^{2\lambda\sigma^-}}})], \end{aligned} \quad (247)$$

$$\begin{aligned}\delta\phi = & \frac{\kappa}{4} [e^{2\lambda\sigma^0} [1 - \ln(1 + \alpha^2 e^{2\lambda\sigma^-}) - \frac{1}{\alpha} e^{-\lambda\sigma^-} \arcsin(\frac{\alpha e^{\lambda\sigma^-}}{\sqrt{1 + \alpha^2 e^{2\lambda\sigma^-}}})] \\ & + \frac{1}{\alpha^2} (1 + \frac{\alpha^2}{2} e^{2\lambda\sigma^-}) - \frac{1}{\alpha^2} \sqrt{1 + \alpha^2 e^{2\lambda\sigma^-}} (1 - \ln(1 + \alpha^2 e^{2\lambda\sigma^-})) \\ & - \frac{1}{\alpha} e^{\lambda\sigma^-} \sqrt{1 + \alpha^2 e^{2\lambda\sigma^-}} \arcsin(\frac{\alpha e^{\lambda\sigma^-}}{\sqrt{1 + \alpha^2 e^{2\lambda\sigma^-}}})] \end{aligned} \quad (248)$$

となる。

ここで重要なのは地平線近傍 $\sigma^- \sim \infty$ だけでなく、 $\sigma^+ \sim \infty$ の領域においても摂動が大きくなり、ある所から先は信用ができないということである。この摂動の指数発散はゲージの自由度では吸収できない物理的なものであることも確かめられる。従って量子効果の反作用はどんなに $\kappa$ を小さくしても、未来に向かって最終的には非摂動的に働くことを示唆する。この示唆は後の節で具体的に確認される。

摂動で計算される曲率は

$$\delta R(x) = -2\kappa\lambda^2 e^{2\lambda\sigma^0} \left[ \frac{\alpha^2 e^{2\lambda\sigma^-}}{1 + \alpha^2 e^{2\lambda\sigma^-}} + \ln(1 + \alpha^2 e^{2\lambda\sigma^-}) \right] \quad (249)$$

と表され、 $\kappa$ に比例した負の値を示す。これは量子効果によって潮汐力の意味での引力が引き起こされることを表す。接近した2本の測地線の差 $\Delta x^a$ は

$$\frac{D^2}{D\tau^2} \Delta x^a = R_{bcd} \frac{dx^b}{d\tau} \frac{dx^c}{d\tau} \Delta x^d \quad (250)$$

の方程式で記述されるが、これを平坦な背景空間における弱場近似をすると

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \Delta x^1 = \frac{1}{2} \delta R \Delta x^1 \quad (251)$$

と表される。(251)式の右辺は $x^1 + \Delta x^1$ と $x^1$ に位置する2つの粒子に働く力の差であり、(249)式の曲率 $\delta R$ が負であることから潮汐力としての引力を与えている。

Hawking 輻射への補正としてのエネルギー運動量テンソルの摂動 $\langle \delta T_{ab} \rangle$ は次のように評価される。

$$\langle \delta T_{+-} \rangle = -\frac{\kappa^2}{8\pi} \lambda^2 e^{2\lambda\sigma^0} \left[ \frac{\alpha^2 e^{2\lambda\sigma^-}}{1 + \alpha^2 e^{2\lambda\sigma^-}} + \ln(1 + \alpha^2 e^{2\lambda\sigma^-}) \right] \quad (252)$$

$$\langle \delta T_{++} \rangle = -\frac{\kappa^2}{4\pi} \lambda^2 e^{2\lambda\sigma^0} \left[ 1 - \ln(1 + \alpha^2 e^{2\lambda\sigma^-}) - \frac{e^{-\lambda\sigma^-}}{\alpha} \arcsin\left(\frac{\alpha e^{\lambda\sigma^-}}{\sqrt{1 + \alpha^2 e^{2\lambda\sigma^-}}}\right) \right] \quad (253)$$

$$\begin{aligned} \langle \delta T_{--} \rangle &= -\frac{\kappa^2 \lambda^2}{4\pi} \left[ -e^{-2\lambda\sigma^0} \left[ \frac{\alpha^2 e^{2\lambda\sigma^-} (3 + 2\alpha^2 e^{2\lambda\sigma^-})}{(1 + \alpha^2 e^{2\lambda\sigma^-})^2} + \ln(1 + \alpha^2 e^{2\lambda\sigma^-}) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{e^{2\lambda\sigma^-}}{(1 + \alpha^2 e^{2\lambda\sigma^-})^{\frac{5}{2}}} (\alpha^4 e^{4\lambda\sigma^-} + 2\alpha^2 e^{2\lambda\sigma^-} + 4) \ln(1 + \alpha^2 e^{2\lambda\sigma^-}) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +4e^{2\lambda\sigma^-} - \frac{e^{2\lambda\sigma^-}}{(1+\alpha^2e^{2\lambda\sigma^-})^{\frac{5}{2}}}(2\alpha^4e^{4\lambda\sigma^-} + \alpha^2e^{2\lambda\sigma^-} + 3) \\
& + \frac{e^{\lambda\sigma^-}}{\alpha(1+\alpha^2e^{2\lambda\sigma^-})^{\frac{3}{2}}}(1 - 6\alpha^2e^{2\lambda\sigma^-} - 4\alpha^4e^{4\lambda\sigma^-}) \arcsin\left(\frac{\alpha e^{\lambda\sigma^-}}{\sqrt{1+\alpha^2e^{2\lambda\sigma^-}}}\right) \\
& - \frac{e^{\lambda\sigma^-}(1+4\alpha^2e^{2\lambda\sigma^-})}{\alpha(1+\alpha^2e^{2\lambda\sigma^-})^{\frac{5}{2}}} \arcsin\left(\frac{\alpha e^{\lambda\sigma^-}}{\sqrt{1+\alpha^2e^{2\lambda\sigma^-}}}\right)] \quad (254)
\end{aligned}$$

エネルギー密度の補正  $\langle \delta T_0^0 \rangle$  は

$$\langle \delta T_0^0 \rangle = -(\langle \delta T_{++} \rangle + \langle \delta T_{--} \rangle + 2\langle \delta T_{+-} \rangle) \quad (255)$$

で与えられる。4次元ブラックホールでは Hawking 温度が質量の逆数に比例したことから、輻射が放出されて質量を減らすとフラックスはより大きくなる。しかし今の2次元理論では温度に対する質量依存性がないため、フラックスが増加するか減少するかは自明ではない。(255) 式は背景を固定した議論での Hawking 輻射

$$\langle T_0^0 \rangle = \frac{\kappa\lambda^2}{\pi}$$

に対する補正を与える。そして  $\langle \delta T_0^0 \rangle$  は常に負であることがわかる。従って輻射放出による補正はもとのフラックスを減少させることがわかる。図 16 に  $\langle \delta T_0^0 \rangle$  を  $\kappa^2\lambda^2/(4\pi)$  で割ったものを  $\lambda = 1$ 、 $\alpha = 1$  において示したものである。図では質量源をはさんで反対側の領域にカットをいれてある。

反作用を取り入れない時 (197) 式から、地平線は  $\sigma^- = \frac{1}{\lambda} \ln(10/\alpha)$  においてほぼ完成し、Hawking 輻射の最終フラックスの 99.99 % にあたる強度の輻射を放出していることが読み取れる。この時刻に質量源近傍  $\sigma^+ \sim -\frac{1}{\lambda} \ln \alpha$  (これは同時に地平線近傍でもある。) においては

$$\langle \delta T_{ab} \rangle \propto \frac{\kappa^2\lambda^3}{M} \quad (256)$$

とふるまうことから、質量が小さいほど Hawking 輻射に対する補正は大きい。このことからワームホールの質量が小さいほどかなり初期から地平線や熱的輻射の描像は変更されることが予想される。

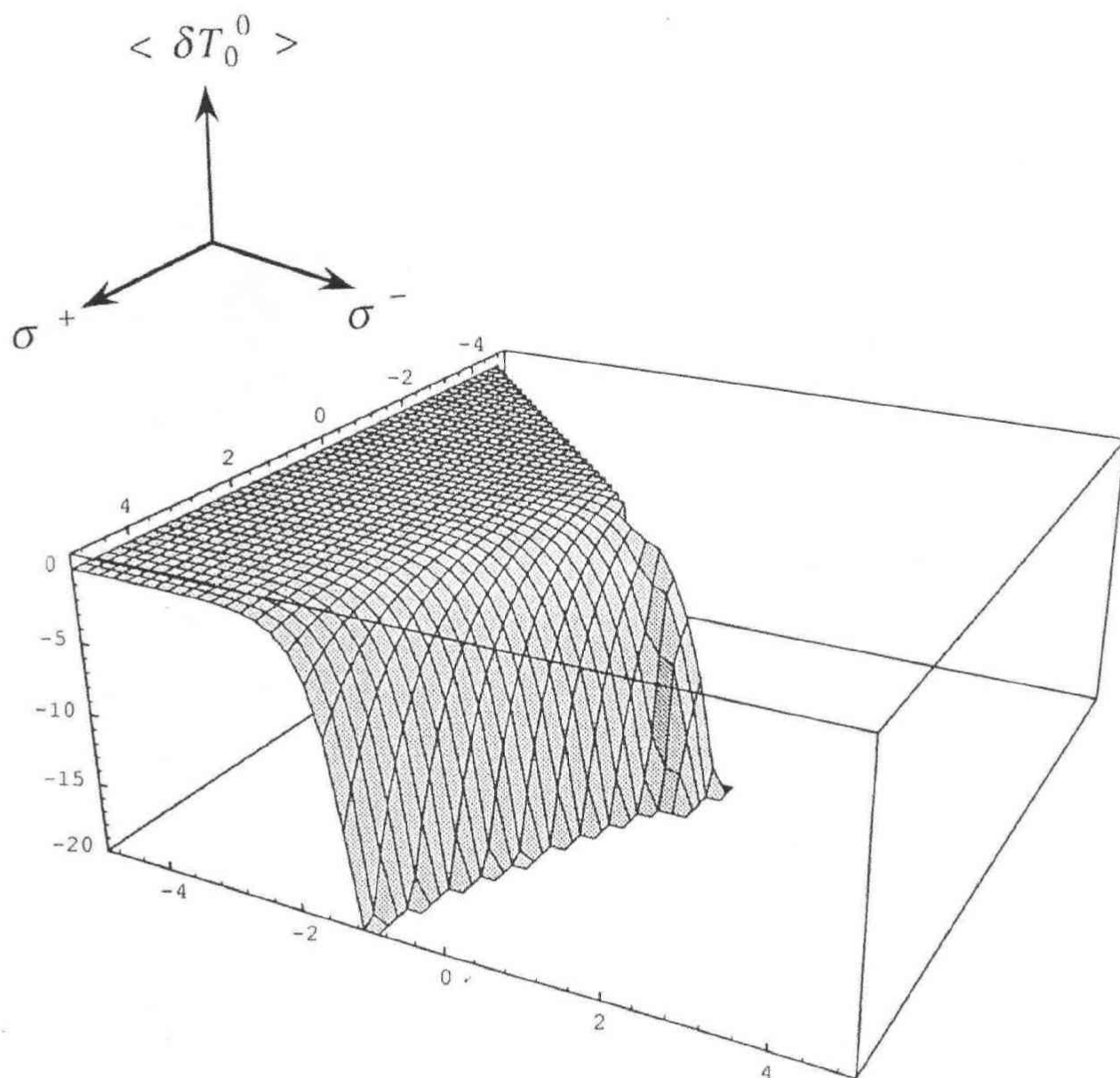
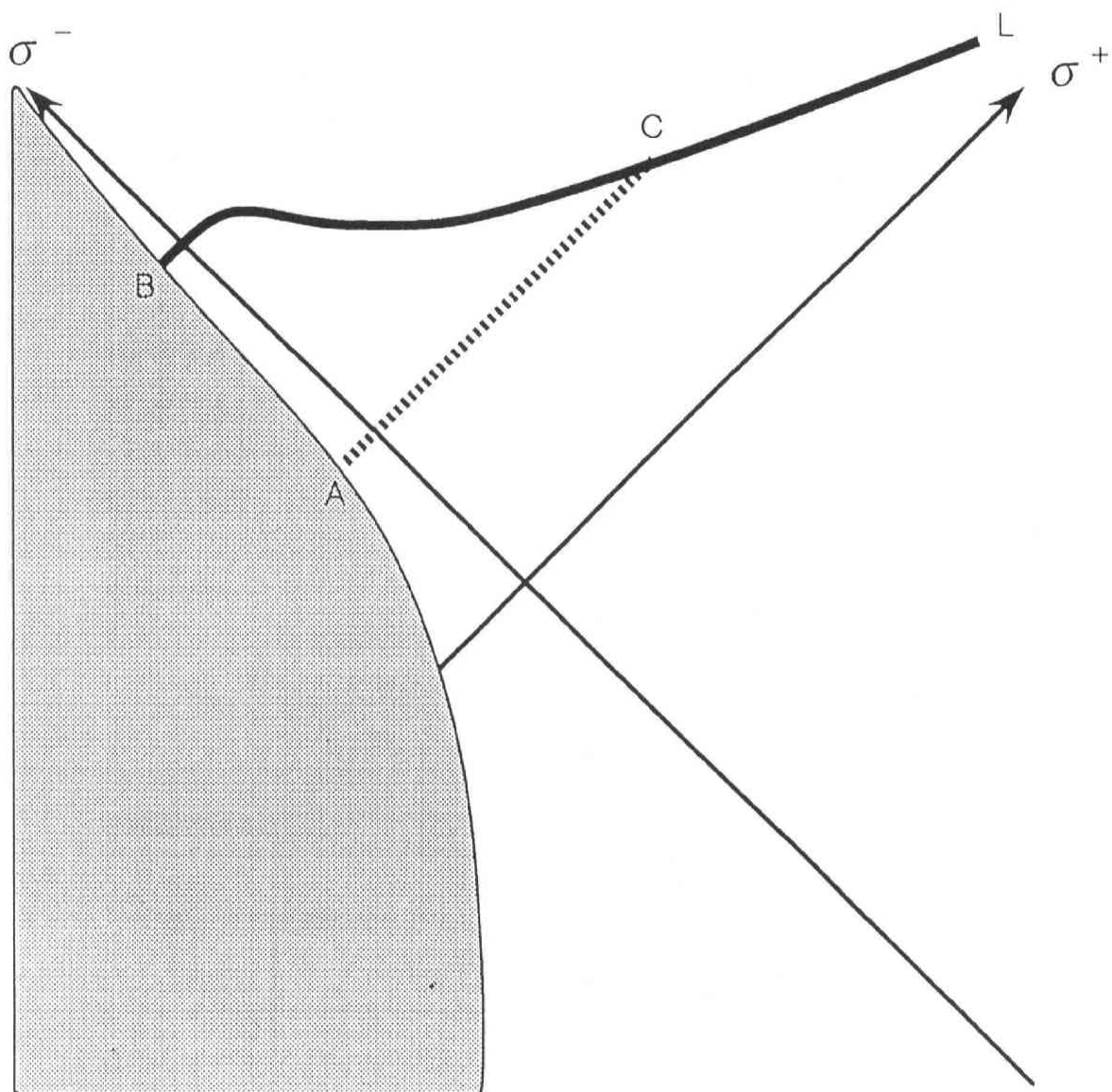


图 16





(252) ~ (254) 式は地平線に近づく方向  $\sigma^- \rightarrow \infty$  において発散している。しかし輻射が出て行く未来の領域  $\sigma^+ \rightarrow \infty$  においても、摂動が発散している。これは摂動近似がよく成り立つ領域から放出された輻射に対しても、時間が経つと反作用の効果が非摂動的に効きだすことを示す。 $\langle \delta T_0^0 \rangle$  の絶対値が  $\langle T_0^0 \rangle$  と同じ  $\kappa \lambda^2$  のオーダーになるところを図 17 の曲線  $L$  で示してある。つまり図 17 中において曲線  $L$  よりも下の領域においては摂動が良く、古典的な描像が維持できる範囲である。点  $B$  の座標は  $\kappa$  が小さい時には

$$(\sigma^+, \sigma^-) = (x_H, -\frac{1}{2\lambda} \ln \kappa) \quad (257)$$

と評価される。 $\kappa$  が小さいほど  $\sigma^-$  は大きくなって、古典描像が成り立つ領域は広がる。また反作用を取り入れない時の  $\langle T_0^0 \rangle$  においてほぼフラックスが Hawking 輻射の値に近いものが放射され始める境界  $\sigma^- = \frac{1}{\lambda} \ln 10 / \alpha$  を破線  $AC$  で表してある。つまり摂動が良い領域において熱的な輻射が存在しているのは図 17 の  $ABC$  で囲まれている有限の広がりをもつ領域のみである。従って熱的な Hawking 輻射の描像はある期間、質量源近傍のみで成り立つだけである。また質量源から遠く離れた領域におけるフラックスに対しては  $\kappa$  の非摂動効果が重要であり、輻射は大きく補正を受けることも示唆している。なお点  $C$  における  $\sigma^+$  は

$$\sigma^+|_C \sim \frac{\alpha}{66\kappa} - \frac{3}{\alpha} \quad (258)$$

と評価できる。

温度一定の熱的輻射を放出するという反作用をいれない時の描像は、例えば  $\kappa$  が小さく  $M$  が大きくとも、時空のある有限な広がりをもつ領域 (図 17 では  $ABC$  で囲まれる部分) でしか成り立たない。そしてこの事は、終状態における輻射に対しても量子反作用の非摂動的効果が強く働いていることも意味する。また (256) 式からワームホールの質量が小さいほどかなり初期から地平線や熱的輻射の描像が大きく変更されることが示唆される。

### 5.3 $M$ に関する摂動

この節では量子効果を非摂動的に扱い、質量  $M$  に関しては摂動で扱うことを試みる。これは  $\lambda$  に比べてはるかに軽い質量のワームホールの形成に量子効果の反作用を

取り入れることに対応する。その結果としてこの軽いワームホールは反作用の効果で完全蒸発する示唆を得る。

摂動の背景としての古典解は真空解をとる。

$$\rho = 0, \quad \phi = \lambda x^0. \quad (259)$$

ここで

$$\Omega = e^{-2\phi} + \frac{\kappa}{2}\phi - \kappa\rho, \quad (260)$$

$$\Delta = \rho - \phi \quad (261)$$

という変数に対しての運動方程式の  $M$  に関する摂動を書くと、

$$\partial_+ \partial_- \delta \Delta = \frac{M}{8} \frac{e^{2\phi+\rho}}{1 + \frac{\kappa}{4}e^{2\phi}} \delta(x^1), \quad (262)$$

$$\partial_+ \partial_- \delta \Omega = 2\lambda^2 e^{2\Delta} \delta \Delta - \frac{M}{4} e^\rho \delta(x^1), \quad (263)$$

$$\begin{aligned} & \partial_\pm^2 \delta \Omega - 2\partial_\pm \Delta \partial_\pm (\delta \Omega + \frac{\kappa}{2} \delta \Delta) - 2\partial_\pm (\Omega + \frac{\kappa}{2} \Delta) \partial_\pm \delta \Delta \\ &= \frac{M}{4} e^\rho \delta(x^1) \end{aligned} \quad (264)$$

となる。(262) 式をラプラシアンの後進グリーン関数を用いて積分すると、

$$\delta \Delta = \frac{M}{4} \int_{-\infty}^{x^0 - |x^1|} Q dt \quad (265)$$

が得られる。なお  $Q$  は

$$Q = \frac{e^{2\phi+\rho}}{1 + \frac{\kappa}{4}e^{2\phi}} \quad (266)$$

で定義される。(265) 式を (263) 式に代入して同様に積分すると

$$\begin{aligned} \delta \Omega &= -\frac{M}{2} \int_{-\infty}^{x^0 - |x^1|} e^\rho dt \\ &+ \frac{M}{2} \int_{-\infty}^{x^0 - |x^1|} [e^{-2\lambda x^0} + e^{-2\lambda t} \\ &- e^{-\lambda t} (e^{-\lambda x^+} + e^{-\lambda x^-})] Q(t) dt \end{aligned} \quad (267)$$

が得られる。(267) 式第 2 項目は (265) 式からの寄与であり、第 1 項目は (263) 式の左辺のデルタ関数からの寄与である。

(267) 式において注意が必要なのは、第 1 項目の積分も第 2 項目の積分も下限において線形発散しており、その 2 つの和だけが有限になっているということである。従って (267) 式はまだ形式的にしか定義されていない。定義するには 2 つの積分を正則化することが必要である。ここでは許される 2 つの独立な cutoff  $T_1$ 、 $T_2$  を用いて

$$\begin{aligned} \delta\Omega = & -\frac{M}{2} \int_{-T_1}^{x^0-|x^1|} e^\rho dt \\ & +\frac{M}{2} \int_{-T_2}^{x^0-|x^1|} [e^{-2\lambda x^0} + e^{-2\lambda t} \\ & -e^{-\lambda t}(e^{-\lambda x^+} + e^{-\lambda x^-})] Q(t) dt \end{aligned} \quad (268)$$

と正則化する。この変更に対して (265) 式を

$$\delta\Delta = \frac{M}{4} \int_{-T_2}^{x^0-|x^1|} Q dt \quad (269)$$

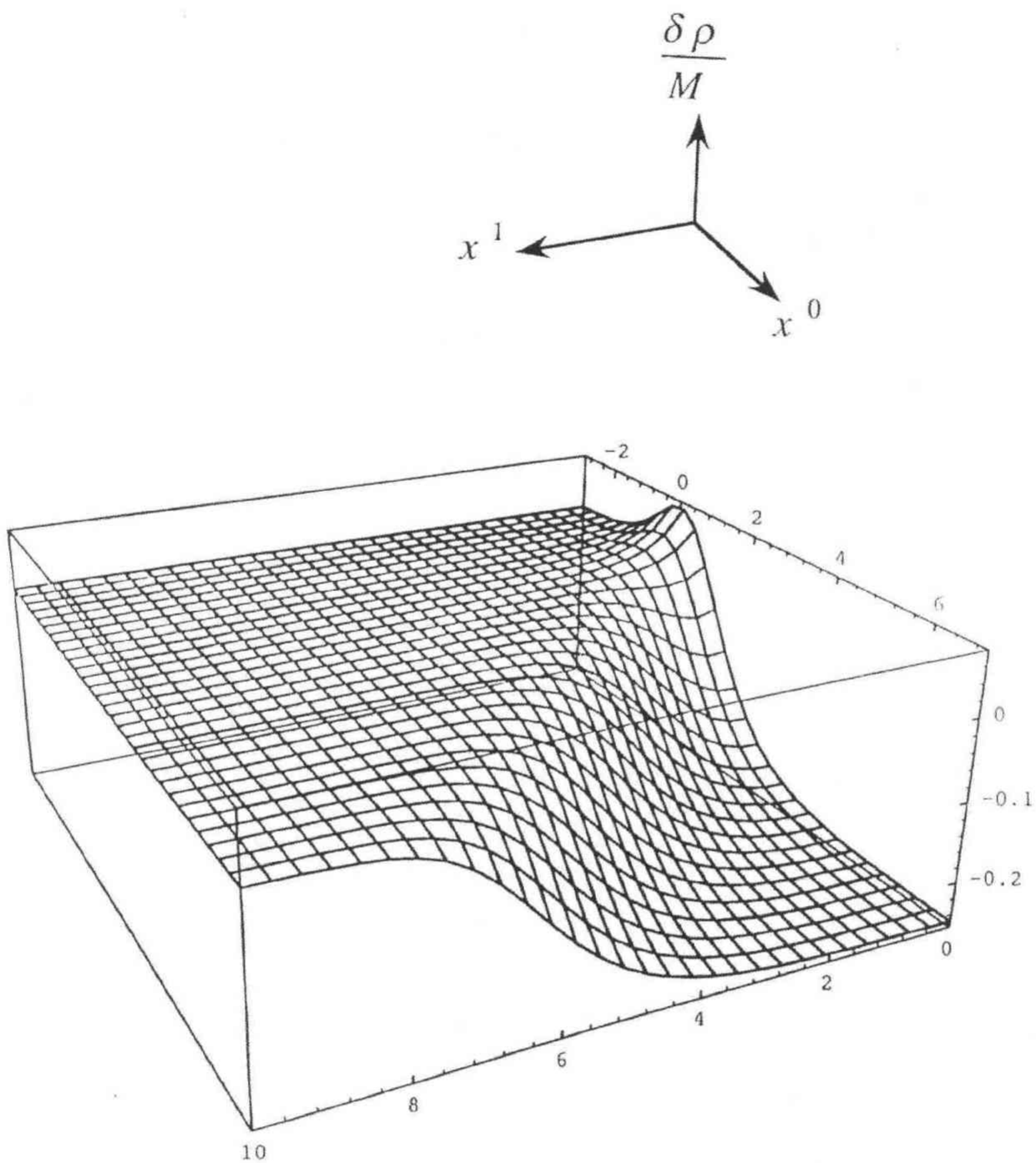
としておけば (262) ~ (264) 式は全て満たされる。全ての計算をした後に  $T_1, T_2 \rightarrow \infty$  の極限をとる。

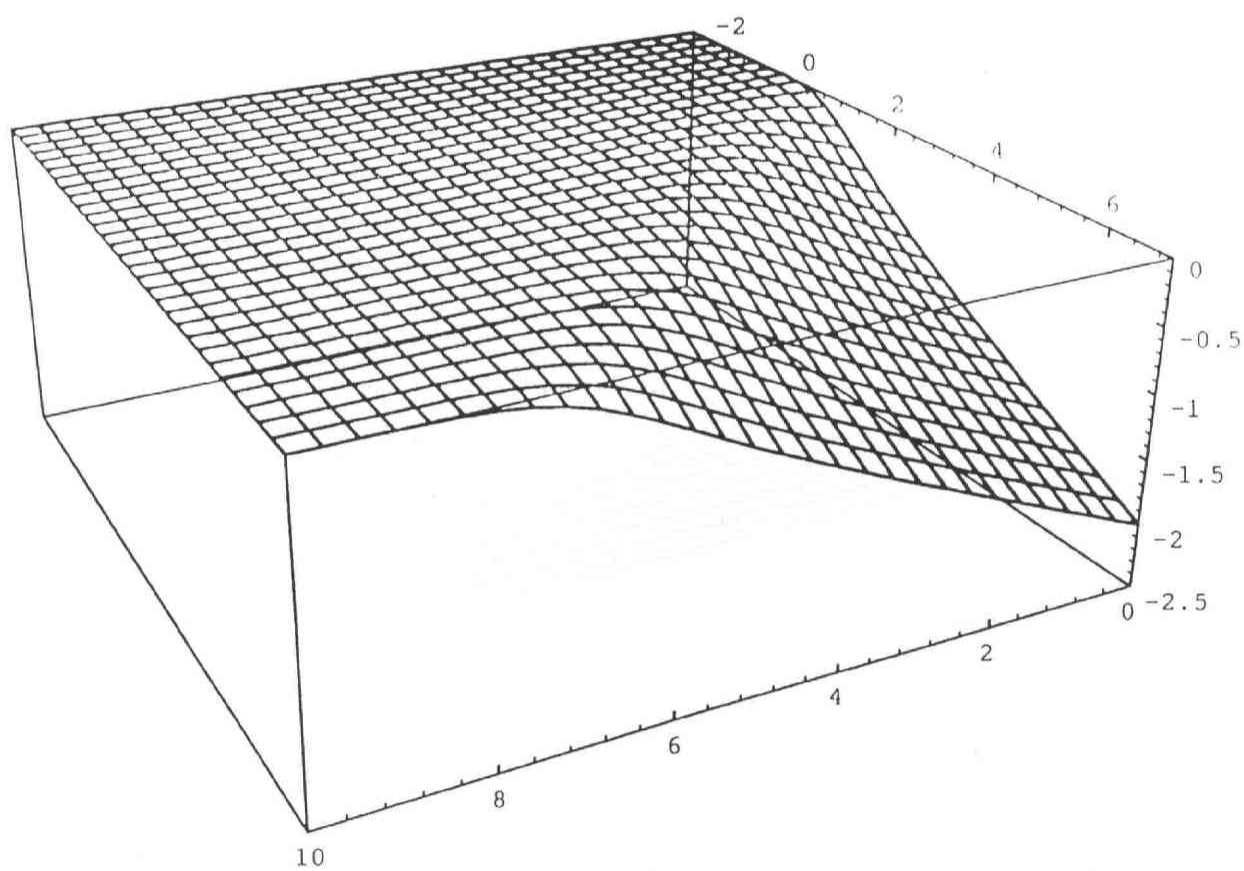
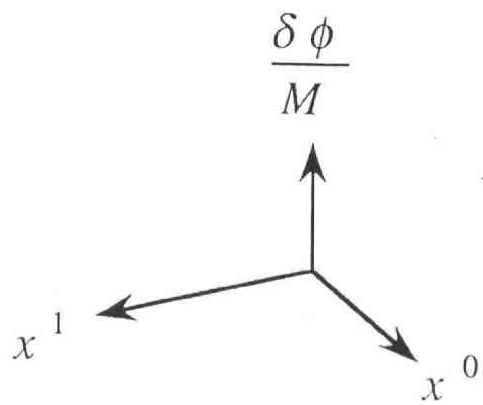
有限な極限を得るためには、 $T = T_1 - T_2$  を一定にしながら  $T_1 \rightarrow \infty$  とすればよい。得られる後進解は  $T$  によっており、一意的ではない。結果を  $\delta\rho$ 、 $\delta\phi$  で表示すると

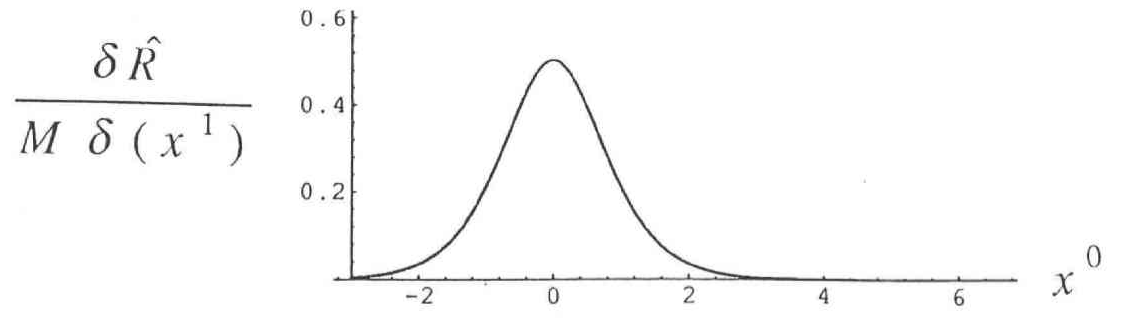
$$\begin{aligned} \delta\rho = & \frac{M}{4} \frac{e^{2\lambda x^0}}{1 + \frac{\kappa}{4} e^{2\lambda x^0}} \times \\ & \left[ \frac{2}{\sqrt{\kappa}\lambda} (e^{-\lambda x^-} + e^{-\lambda x^+}) \arctan\left(\frac{\sqrt{\kappa}}{2} e^{2\lambda(x^0-|x^1|)}\right) + T \right], \end{aligned} \quad (270)$$

$$\begin{aligned} \delta\phi = & \frac{M}{4} \frac{e^{2\lambda x^0}}{1 + \frac{\kappa}{4} e^{2\lambda x^0}} \times \\ & \left[ \frac{2}{\sqrt{\kappa}\lambda} (e^{-\lambda x^-} + e^{-\lambda x^+}) \arctan\left(\frac{\sqrt{\kappa}}{2} e^{2\lambda(x^0-|x^1|)}\right) + T \right] \\ & - \frac{M}{2\kappa\lambda} \ln\left(1 + \frac{\kappa}{4} e^{2\lambda(x^0-|x^1|)}\right) \end{aligned} \quad (271)$$

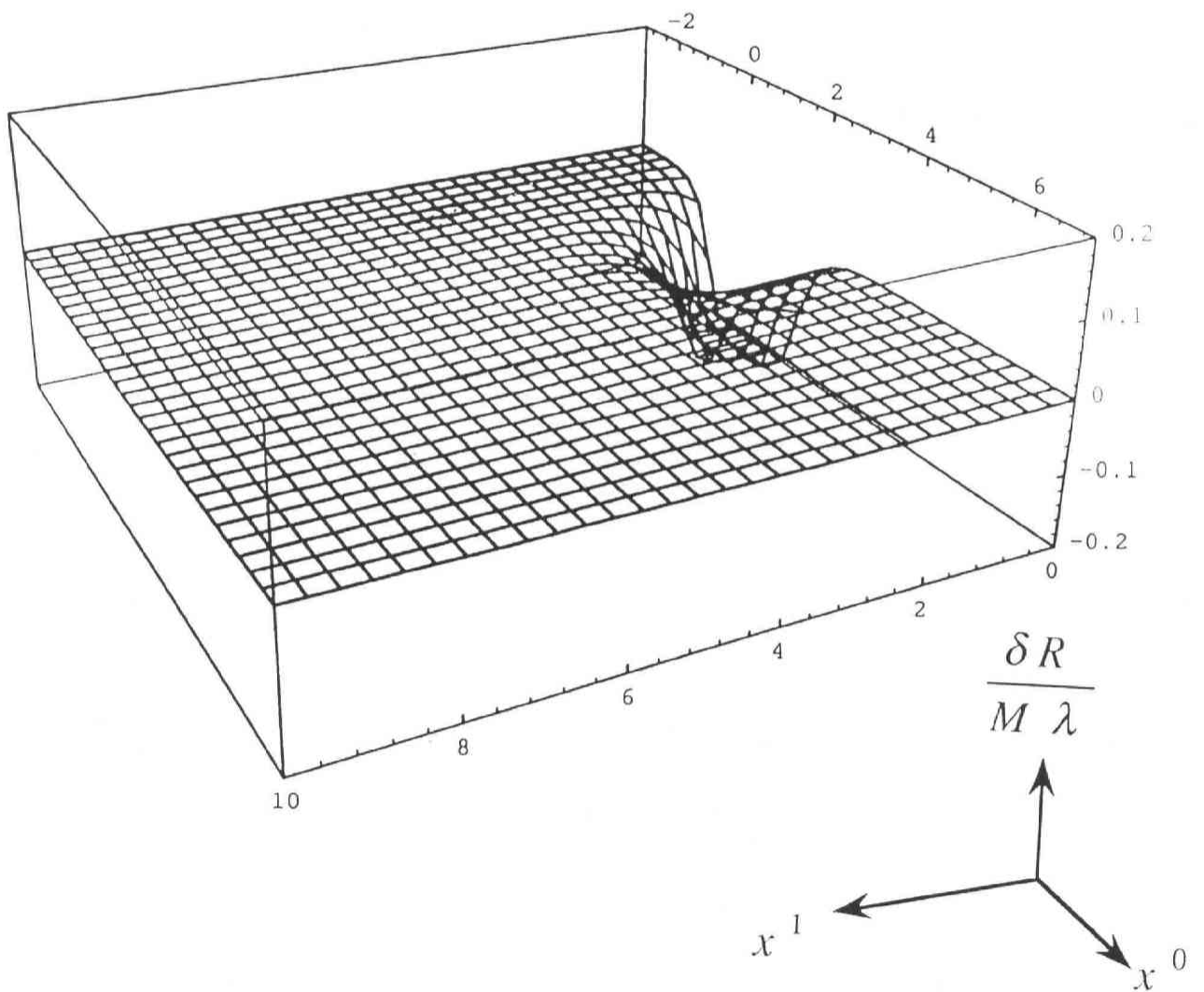
となる。(270)、(271) 式中の  $T$  の不定性は、空間無限遠方において真空に漸近するという条件で一意的に  $T = -1/\lambda$  と定まる。そのように  $T$  をとった時の  $\delta\rho/M$ 、 $\delta\phi/M$  の



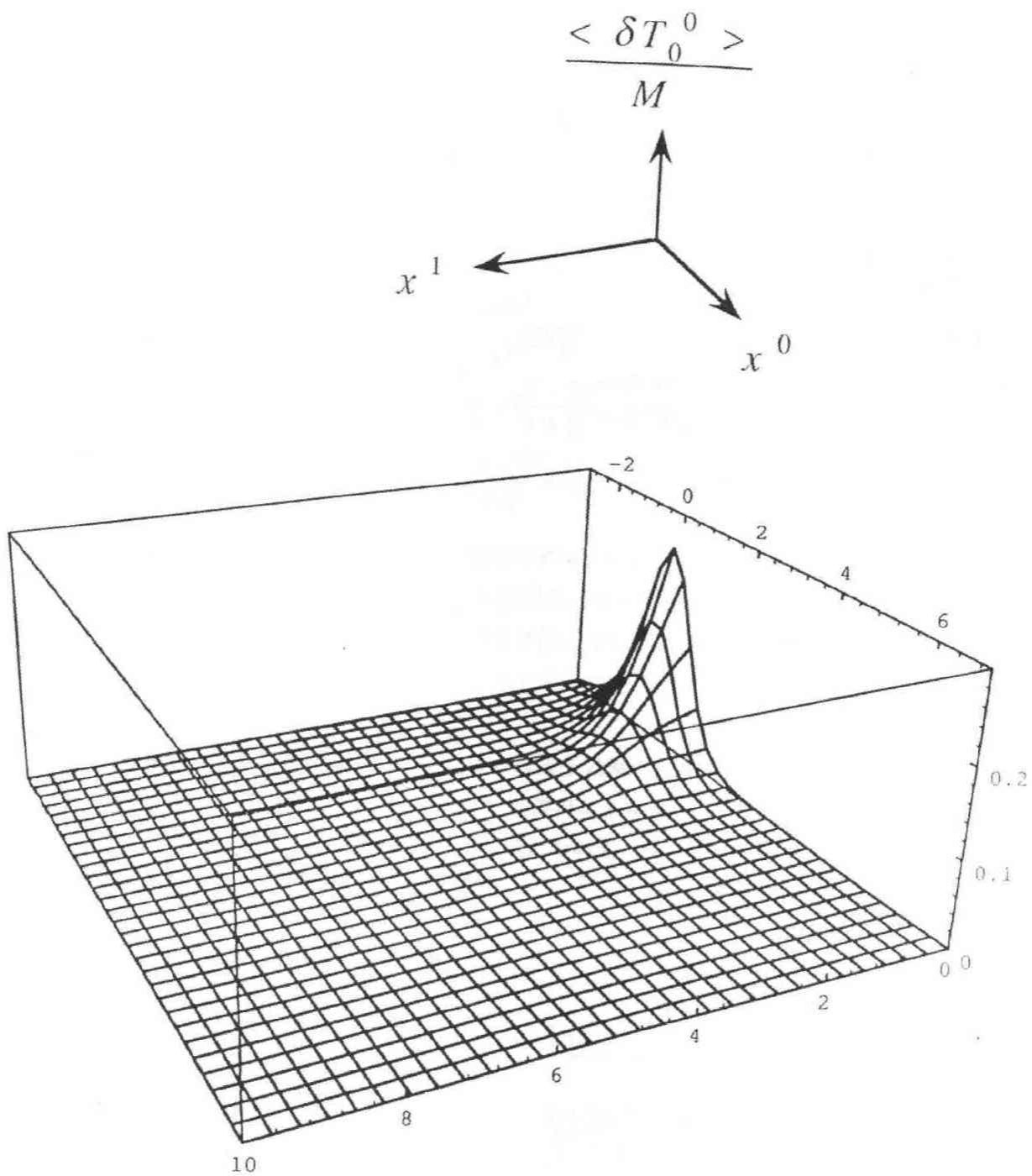




☒ 20



☒ 21



分布を $\lambda = 1$ 、 $\kappa = 4$ の場合として図 18、図 19 に示す。

$T = -1/\lambda$ と固定した時、曲率は

$$\delta R = \delta \hat{R} + \delta \tilde{R}. \quad (272)$$

$$\delta \hat{R} = 2M\delta(x^1) \frac{e^{2\lambda x^0}}{(1 + \frac{\kappa}{4}e^{2\lambda x^0})^2}. \quad (273)$$

$$\begin{aligned} \delta \tilde{R} = & \frac{2M\lambda e^{2\lambda x^0}}{(1 + \frac{\kappa}{4}e^{2\lambda x^0})^2} \times \left[ \frac{1 - \frac{\kappa}{4}e^{2\lambda(x^0 - |x^1|)}}{1 + \frac{\kappa}{4}e^{2\lambda(x^0 - |x^1|)}} - \frac{1 - \frac{\kappa}{4}e^{2\lambda x^0}}{1 + \frac{\kappa}{4}e^{2\lambda x^0}} \right. \\ & \left. - \frac{\sqrt{\kappa}(e^{-\lambda x^+} + e^{-\lambda x^-})}{e^{-2\lambda x^0} + \frac{\kappa}{4}} \arctan\left(\frac{\sqrt{\kappa}}{2}e^{\lambda(x^0 - |x^1|)}\right) \right] \end{aligned} \quad (274)$$

と表される。 $\lambda = 1$ 、 $\kappa = 4$ の時に曲率のデルタ関数に比例した項 $\delta \hat{R}$ の係数を図示したものが図 20 であり、 $x^1 > 0$ での曲率 $\delta \tilde{R}$ を示したのが図 21 である。 $x^+ \rightarrow \infty$ において $\delta \tilde{R} \propto e^{-\lambda x^+} \rightarrow 0$ のふるまいで曲率は消えている。図においては質量源近傍に局所的な曲率分布はあるが時間が経過するとすぐに全ての空間で平坦になっていることが見てとれる。この結果地平線も生じない。小さな質量の場合輻射を出して、すぐに完全蒸発することを示唆している。これは量子効果の反作用をいれない解析と大きく異なる点である。また Hawking 輻射の描像がエネルギー運動量テンソルにおいても大きく変更される。補正は $x^1 > 0$ の領域において

$$\begin{aligned} \langle \delta T_{--} \rangle = & -\frac{\kappa M \lambda}{4\pi} \frac{e^{2\lambda x^0}}{(1 + \frac{\kappa}{4}e^{2\lambda x^0})^2} \times \left[ \frac{\frac{2}{\sqrt{\kappa}}(e^{-\lambda x^+} - \frac{\kappa}{4}e^{\lambda x^+}) \arctan(\frac{\sqrt{\kappa}}{2}e^{\lambda x^-})}{1 + \frac{\kappa}{4}e^{2\lambda x^0}} - \frac{1}{1 + \frac{\kappa}{4}e^{2\lambda x^0}} \right. \\ & \left. + \frac{1 + e^{-2\lambda x^1}}{1 + \frac{\kappa}{4}e^{2\lambda x^-}} + \frac{2e^{-2\lambda x^1}(1 + \frac{\kappa}{4}e^{2\lambda x^0})}{(1 + \frac{\kappa}{4}e^{2\lambda x^-})^2} \right] \end{aligned} \quad (275)$$

$$\begin{aligned} \langle \delta T_{++} \rangle = & \frac{\kappa M \lambda}{4\pi} \left[ \frac{e^{\lambda x^-} \arctan(\frac{\sqrt{\kappa}}{2}e^{\lambda x^-})}{\sqrt{\kappa}(1 + \frac{\kappa}{4}e^{2\lambda x^0})^2} \right. \\ & \left. - \frac{e^{2\lambda x^0}}{(1 + \frac{\kappa}{4}e^{2\lambda x^0})^3} \left( \frac{2}{\sqrt{\kappa}}(e^{-\lambda x^+} + e^{-\lambda x^-}) \arctan(\frac{\sqrt{\kappa}}{2}e^{\lambda x^-}) - 1 \right) \right] \end{aligned} \quad (276)$$



$$\begin{aligned}
& \langle \delta T_{+-} \rangle \\
&= \frac{\kappa M \lambda}{8\pi} \frac{e^{2\lambda x^0}}{(1 + \frac{\kappa}{4} e^{2\lambda x^0})^2} \times \\
& \left[ \frac{1 - \frac{\kappa}{4} e^{2\lambda x^-}}{1 + \frac{\kappa}{4} e^{2\lambda x^-}} \right. \\
& \left. - \frac{1 - \frac{\kappa}{4} e^{2\lambda x^0}}{1 + \frac{\kappa}{4} e^{2\lambda x^0}} - \frac{\sqrt{\kappa}(e^{-\lambda x^+} + e^{-\lambda x^-})}{e^{-2\lambda x^0} + \frac{\kappa}{4}} \arctan\left(\frac{\sqrt{\kappa}}{2} e^{\lambda x^-}\right) \right] \quad (277)
\end{aligned}$$

と計算される。これから得られるエネルギー密度は

$$\begin{aligned}
\langle \delta T_0^0 \rangle &= \frac{\kappa M \lambda}{4\pi} \frac{e^{2\lambda x^0}}{(1 + \frac{\kappa}{4} e^{2\lambda x^0})^2} \times \\
& \left[ \frac{3(e^{-\lambda x^+} + \frac{\kappa}{4} e^{\lambda x^-}) + 2(e^{-\lambda x^-} + \frac{\kappa}{4} e^{\lambda x^+})}{\sqrt{\kappa}(1 + \frac{\kappa}{4} e^{2\lambda x^0})} \arctan\left(\frac{\sqrt{\kappa}}{2} e^{\lambda x^-}\right) \right. \\
& \left. - 1 + e^{-2\lambda x^+} (1 + \frac{\kappa}{4} e^{2\lambda x^0}) \frac{3 + \frac{\kappa}{4} e^{2\lambda x^-}}{(1 + \frac{\kappa}{4} e^{2\lambda x^-})^2} \right] \quad (278)
\end{aligned}$$

となる。この  $\langle \delta T_0^0 \rangle$  を  $M$  で割ったものを  $\lambda = 1$ 、 $\kappa = 4$  の時図示したものが図 22 である。未来においてはフラックスは指数関数的に減衰している。従って熱的輻射のような一定のフラックスは観測されない。

フラックスが消滅することは、量子的なフラックス  $\langle T_{ab} \rangle$  が、曲率の存在する領域において保存しないことが関係している。式で書くと

$$\nabla^a \langle T_{ab} \rangle = \frac{\kappa}{4\pi} R \nabla_b \phi. \quad (279)$$

という関係のために  $\langle T_{ab} \rangle$  は保存せず、重力の自由度にエネルギーを渡してしまう。今の場合質量源近傍で生成されたフラックスは時空への反作用として、有限の曲率を与え、その領域において (279) 式の左辺を通じてフラックスはディラトンに変換されてしまう。そして無限遠方にはかわりにディラトン波が伝搬する。図 19 において  $\delta\phi$  分布の傾斜の変化が無限遠方に光速に近い速度で伝わるのが見てとれる。

#### 5.4 非摂動的解析

この節では (233) 式を扱い、真空分極がワームホール時空へ与える反作用を非摂動的に解析する。そして Hawking 輻射の熱的描像は反作用を取り入れると大きく変

更され、空間無限遠方の観測者はいかなる輻射も観測しないことを述べる。またワームホールに対して臨界質量が存在して、それより軽いワームホールは完全蒸発することを示す。また臨界質量よりも重いワームホールは蒸発しきれず地平線を形成するが、時空の性質は反作用を取り入れる前と大きく異なることを述べる。

(233) 式が残された解くべき方程式ではあるが、このままでは解析がしにくいので、これを3つの変数

$$g = e^{\bar{\phi}} (> 0), \quad (280)$$

$$y = e^{-\frac{F}{2} + \lambda t} (> 0), \quad (281)$$

$$h = \frac{dg}{dt} \quad (282)$$

に対する1階の微分方程式に直す。結果は

$$\dot{g} = h, \quad (283)$$

$$\dot{y} = \lambda y - \frac{M}{4} \frac{g^3}{1 + \frac{\kappa}{4} g^2}, \quad (284)$$

$$\begin{aligned} \dot{h} = & -\lambda h + \frac{M g^3}{4 y (1 + \frac{\kappa}{4} g^2)} h + \frac{3 + \frac{\kappa}{4} g^2}{g (1 + \frac{\kappa}{4} g^2)} h^2 \\ & - \frac{\lambda^2 g^3}{y^2 (1 + \frac{\kappa}{4} g^2)} + \frac{M^2 g^7}{16 y^2 (1 + \frac{\kappa}{4} g^2)^2} \\ & + \frac{\kappa}{4} \left[ \frac{\lambda^2 g^3}{1 + \frac{\kappa}{4} g^2} - \frac{M^2 g^9}{8 y^2 (1 + \frac{\kappa}{4} g^2)^3} - \frac{M g^5 (3 + \frac{\kappa}{4} g^2)}{2 y (1 + \frac{\kappa}{4} g^2)^3} h \right] \end{aligned} \quad (285)$$

となる。また過去と無限遠方において古典的ワームホール解に漸近する境界条件

$$g = e^{\lambda t} \left( 1 + \frac{M}{8\lambda} e^{2\lambda t} \right) + o(e^{4\lambda t}), \quad (286)$$

$$y = e^{\lambda t} \left( 1 - \frac{M}{8\lambda} e^{2\lambda t} \right) + o(e^{4\lambda t}), \quad (287)$$

$$h = \lambda e^{\lambda t} \left( 1 + \frac{3M}{8\lambda} e^{2\lambda t} \right) + o(e^{4\lambda t}) \quad (288)$$

のもとで  $g$ 、 $y$ 、 $h$  が解けると、 $x^1 > 0$  の領域において

$$\rho = \phi - \lambda x^1 - \ln y(x^-) \quad (289)$$

$$e^{-2\phi} - \frac{\kappa}{2} \phi$$

$$= A(x^-)e^{-\lambda x^+} - \frac{\kappa}{4}\lambda x^+ + B(x^-), \quad (290)$$

$$A(x^-) = e^{\lambda x^-} \left[ \frac{\kappa M g^3}{8\lambda y(1 + \frac{\kappa}{4}g^2)} + \frac{h(1 + \frac{\kappa}{4}g^2)}{\lambda g^3} - \frac{\kappa}{4} - \frac{Mg}{4\lambda y} \right] \Big|_{t=x^-} \quad (291)$$

$$B(x^-) = \frac{\kappa}{4}\lambda x^- - \frac{\kappa}{2}\ln y(x^-) + \lambda \int_{-\infty}^{x^-} dt \left[ \frac{1}{y^2} - \frac{Mg}{4\lambda y} - \frac{h}{\lambda g^3} + \frac{\kappa}{4}(1 - \frac{h}{\lambda g}) \right] \quad (292)$$

から  $\rho$ 、 $\phi$  が決定される。

$x^1 > 0$  における  $g$ 、 $y$ 、 $h$  を用いた曲率の表式は

$$R = \frac{4}{1 + \frac{\kappa}{2}e^{2\phi}} \left[ \frac{e^{2\phi+2\lambda x^1}}{(1 + \frac{\kappa}{4}e^{2\phi})^2} C(x) D(x) - \lambda^2 \right], \quad (293)$$

$$C(x) = \frac{\kappa}{4}\lambda + e^{-2\lambda x^1} \left[ \frac{\kappa M}{8y} \frac{g^3}{1 + \frac{\kappa}{4}g^2} - \frac{Mg}{4y} - \frac{\kappa}{4}\lambda + \frac{1 + \frac{\kappa}{4}g^2}{g^3} h \right] \Big|_{t=x^-},$$

$$D(x) = \lambda(e^{-2\lambda x^1} - 1) + \left[ \frac{Myg}{4} - \frac{\kappa M}{8} \frac{g^3 y}{1 + \frac{\kappa}{4}g^2} + \frac{1 + \frac{\kappa}{4}g^2}{g^3} y^2 h \right] \Big|_{t=x^-}$$

で与えられる。

(289) 式、(290) 式において  $x^-$  を固定したまま  $x^+ \rightarrow \infty$  の極限をとると

$$\rho = \frac{\lambda}{2}x^- - \frac{2}{\kappa}B(x^-) - \ln y(x^-), \quad (294)$$

$$\phi = \frac{\lambda}{2}x^+ - \frac{2}{\kappa}B(x^-) \quad (295)$$

という漸近形を得る。ここで特筆すべきなのは  $B$  が  $\kappa$  の 0 次であることから、 $\rho$ 、 $\phi$  の漸近形は  $o(\frac{1}{\kappa})$  を含んでいるということである。これは  $\kappa$  の非摂動的な効果の現われである。(294) 式、(295) 式を (293) 式に代入すると、 $R \propto e^{-\lambda x^+}$  の振る舞いで曲率は 0 になっている。従って  $x^+ \rightarrow \infty$  の領域では漸近的に平坦になっている。

また  $x^+ \rightarrow \infty$  の漸近的平坦領域においてはエネルギー運動量テンソルは 0 であることが証明できる。 $\langle T_{+-} \rangle$  は一般に曲率に比例していることから、 $x^+ \rightarrow \infty$  において消滅していることがわかる。また  $\langle T_{++} \rangle$  も漸近形 (294) 式、(295) 式を定義式 (211) 式に代入した段階ですでに消えていることが示せる。 $\langle T_{--} \rangle$  だけは評価に少

しの計算を要する。(294) 式、(295) 式を定義式 (211) 式に代入すると、

$$\begin{aligned} \langle T_{--} \rangle = & \frac{\kappa}{\pi} \left[ \frac{1}{\kappa} \ddot{B}(x^-) + \frac{d}{dx^-} \frac{\dot{y}}{y} \right. \\ & \left. + \left( \frac{\lambda}{2} - \frac{\dot{y}(x^-)}{y(x^-)} \right) \left( \frac{\lambda}{2} - \frac{\dot{y}(x^-)}{y(x^-)} - \frac{2}{\kappa} \dot{B}(x^-) \right) \right] \end{aligned} \quad (296)$$

という表式が得られる。これに (292) 式を代入すると  $(g, y, h)$  とその微分で書けることがわかる。そして運動方程式 (283)、(284)、(285) を使って、微分項をすべて  $(g, y, h)$  で書き直すことができる。その結果  $\langle T_{--} \rangle$  も消えていることがわかる。

この結果は  $M$  の摂動での結果と整合するものであり、反作用を取り入れる前の解析と大きく異なる点である。反作用を考慮する前には  $x^+ \rightarrow \infty$  の領域においても熱的な輻射が存在し、無限遠方の平坦な領域にいる観測者でも時間がたてばその有限の輻射をとらえることが可能であった。しかし反作用をいれた議論ではこの結論は変り、無限遠方の観測者はワームホールからのフラックスを捕まえることはできない。ワームホールからでた輻射は自ら曲率をうみだし、フラックスの発散に関する関係式

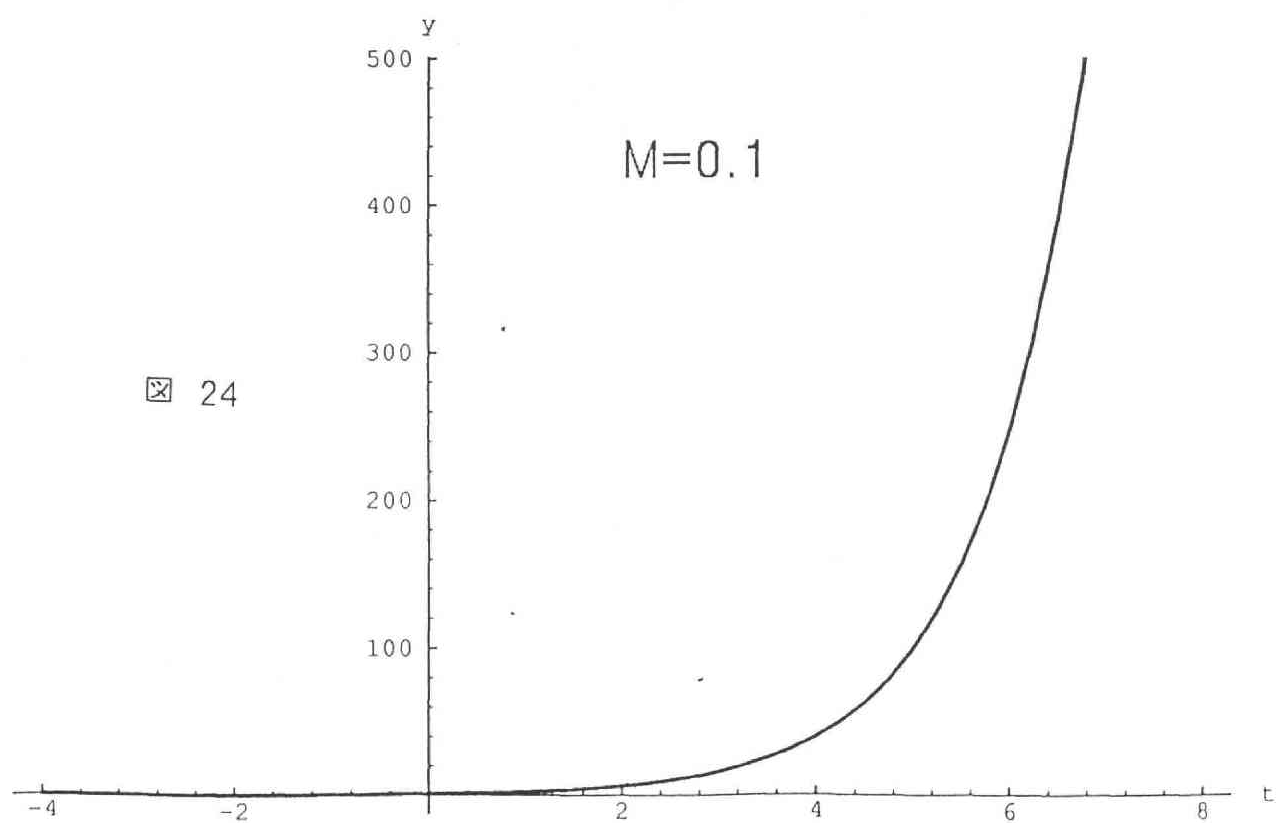
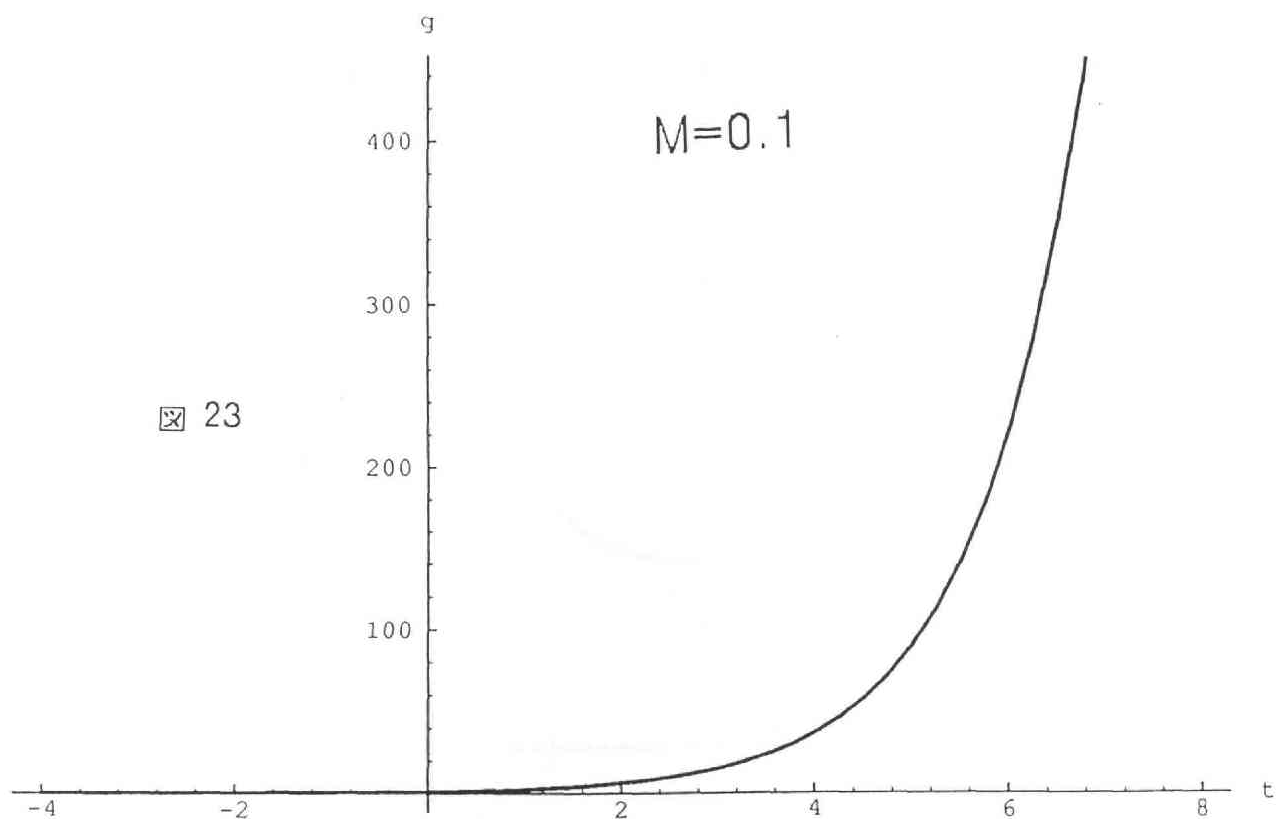
$$\nabla^a \langle T_{ab} \rangle = \frac{\kappa}{4\pi} R \nabla_b \phi \quad (297)$$

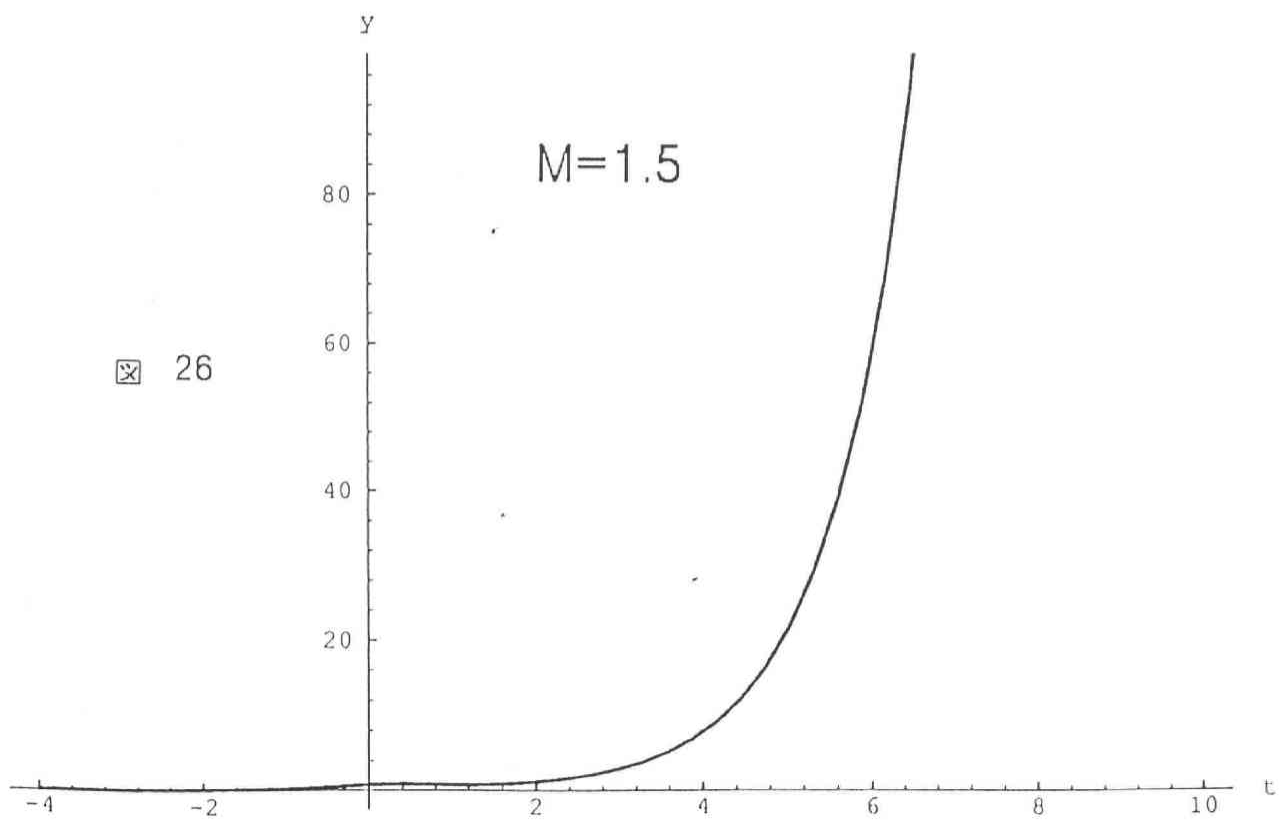
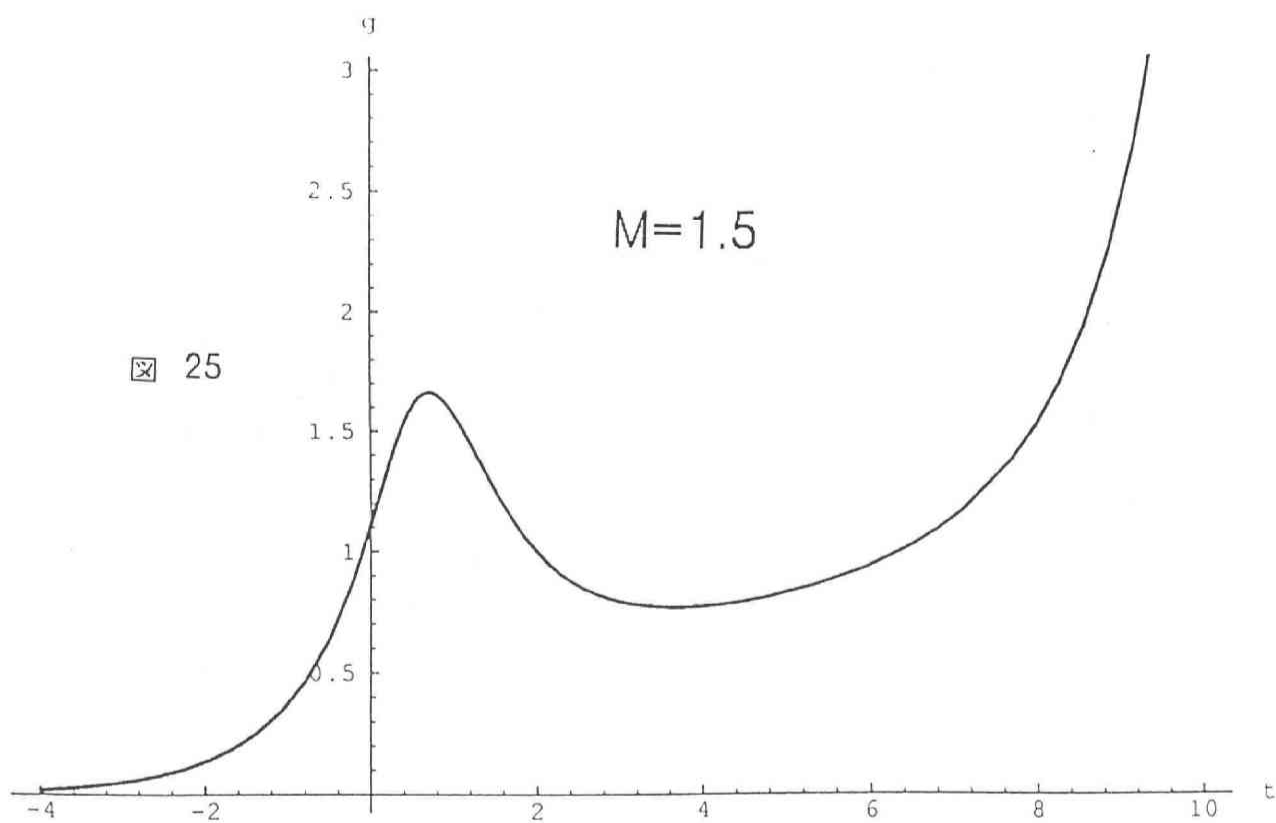
の右辺を通じて重力の自由度であるディラトン場の励起に転換されると考えられる。

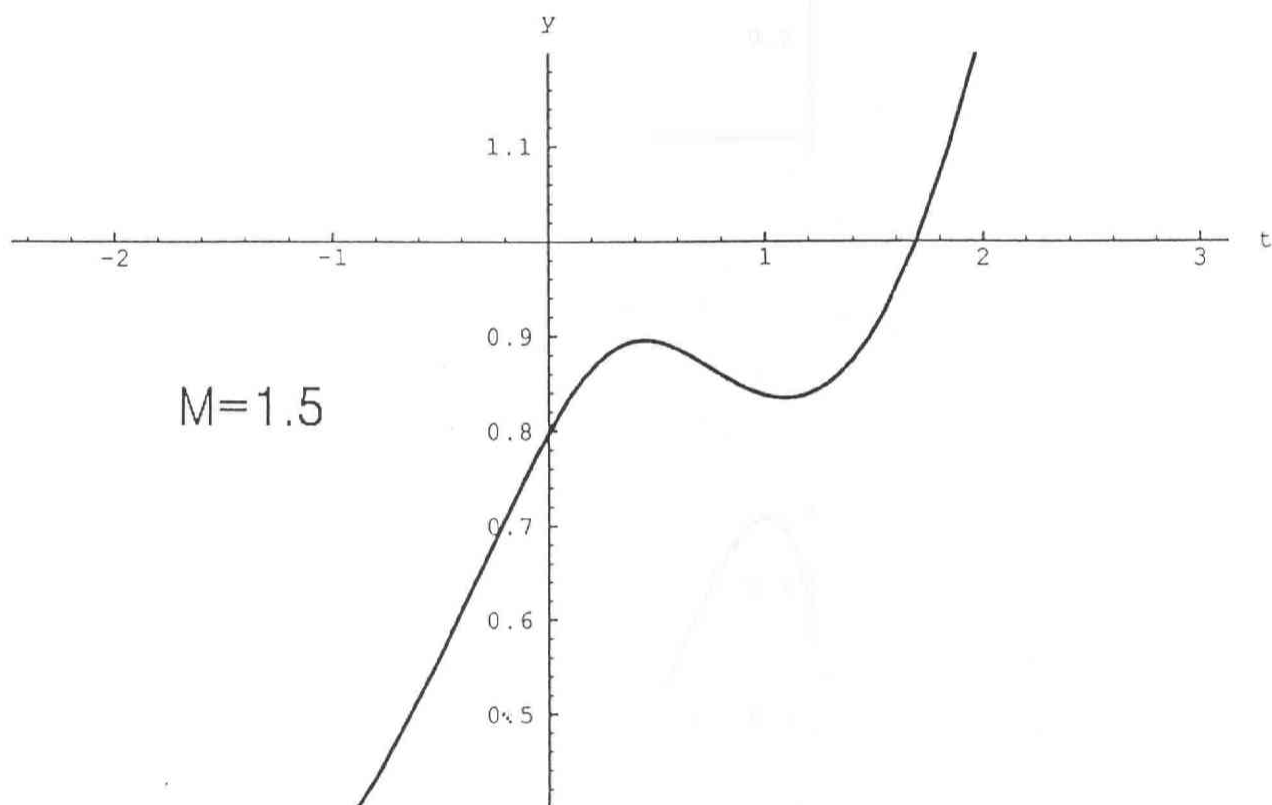
熱的な Hawking 輻射を観測できるのは質量が大きい時、ある期間の質量源近傍だけである。つまりこの理論でそれは短期的で局所的な現象であるということがこの非摂動的議論から明らかになった。

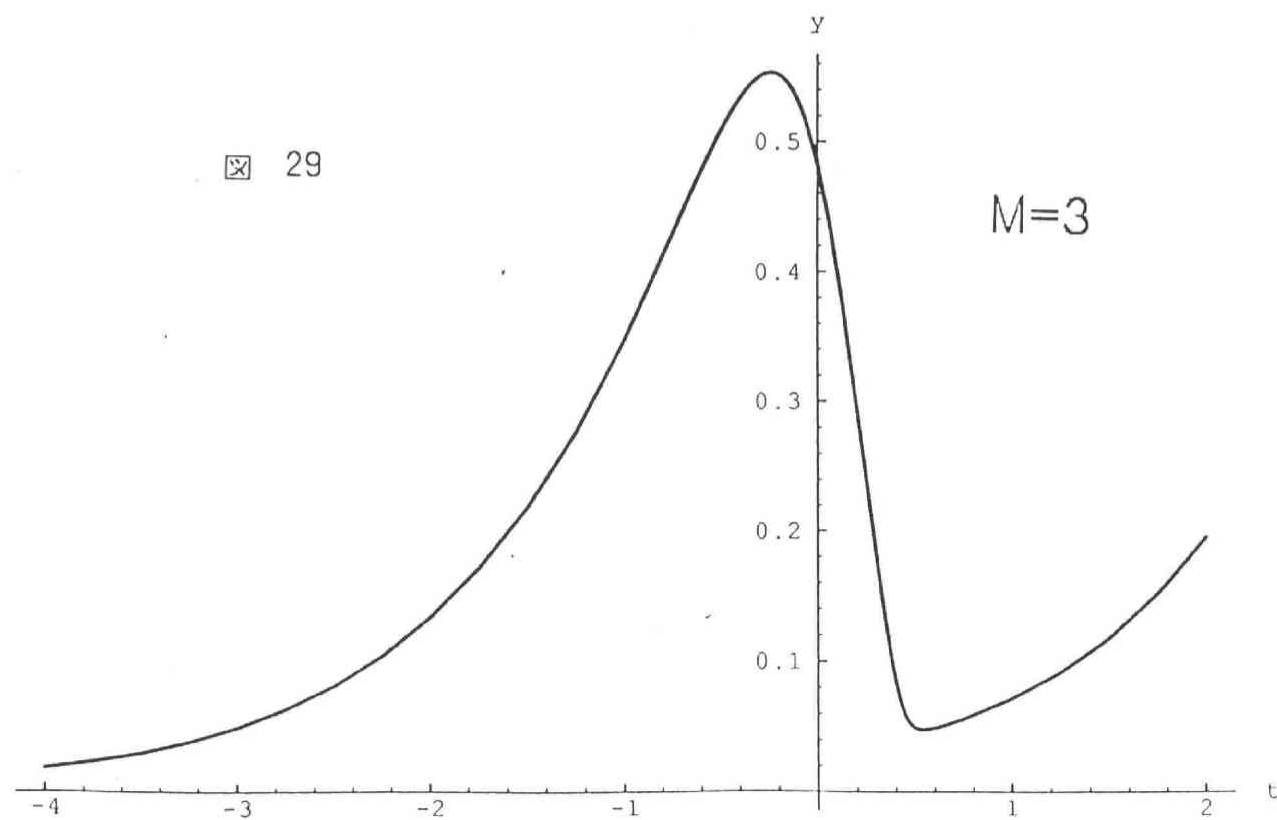
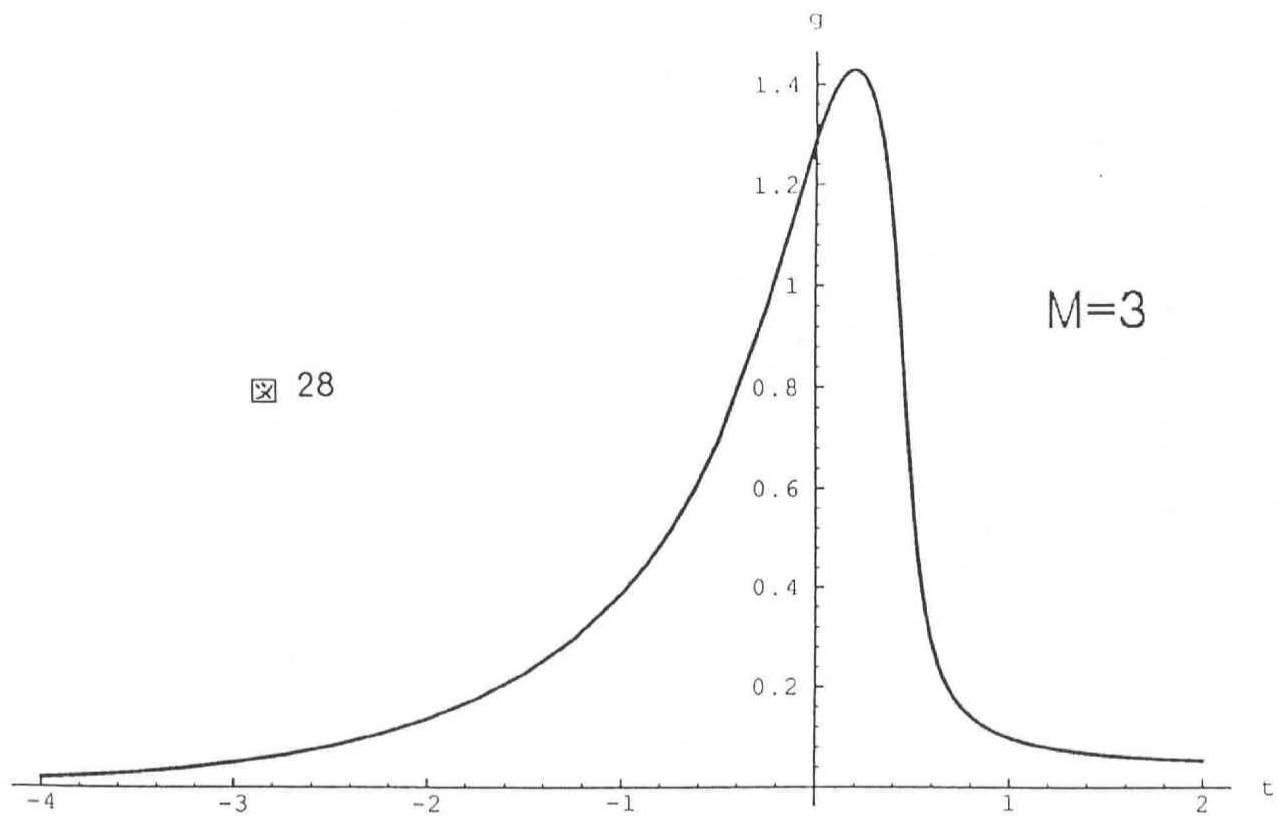
方程式 (283)、(284)、(285) を境界条件 (286) ~ (288) のもとで数値的に解くと、解の振る舞いから 2 つのグループに分類されることが示される。ワームホールに臨界質量  $M_{cr} \sim 4.2\kappa\lambda$  が存在して、これより軽いワームホールは完全蒸発をすることがわかる。またこれより重いワームホールは蒸発しきれず、地平線は最後まで消えないことを示される。

図 23~図 37 は  $\kappa = 1$ 、 $\lambda = 1$  とした場合の  $(g, y)$  の振る舞いを示す。図 23、24 は  $M = 0.1$  とした時の解であり、 $g$ 、 $y$ ともに指数的に発散している。図 25、26、27

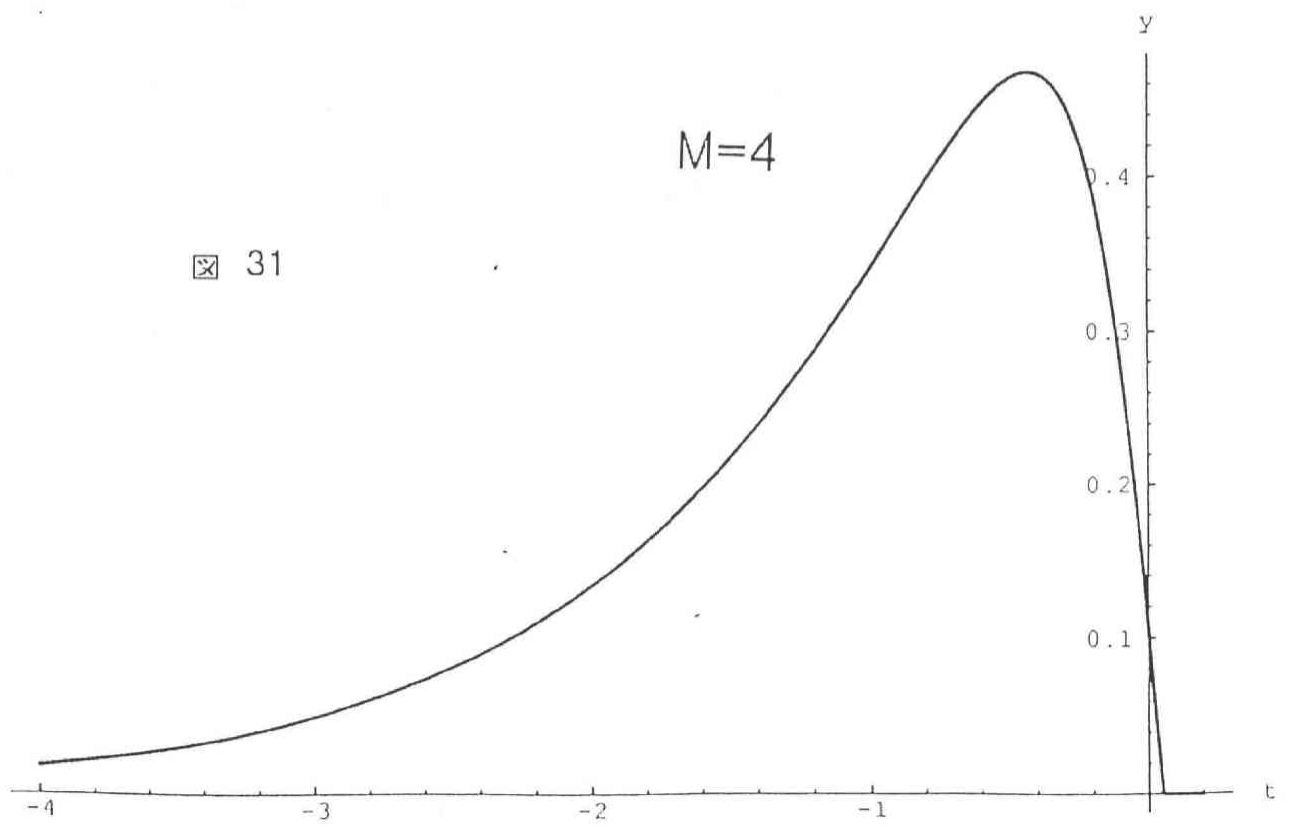
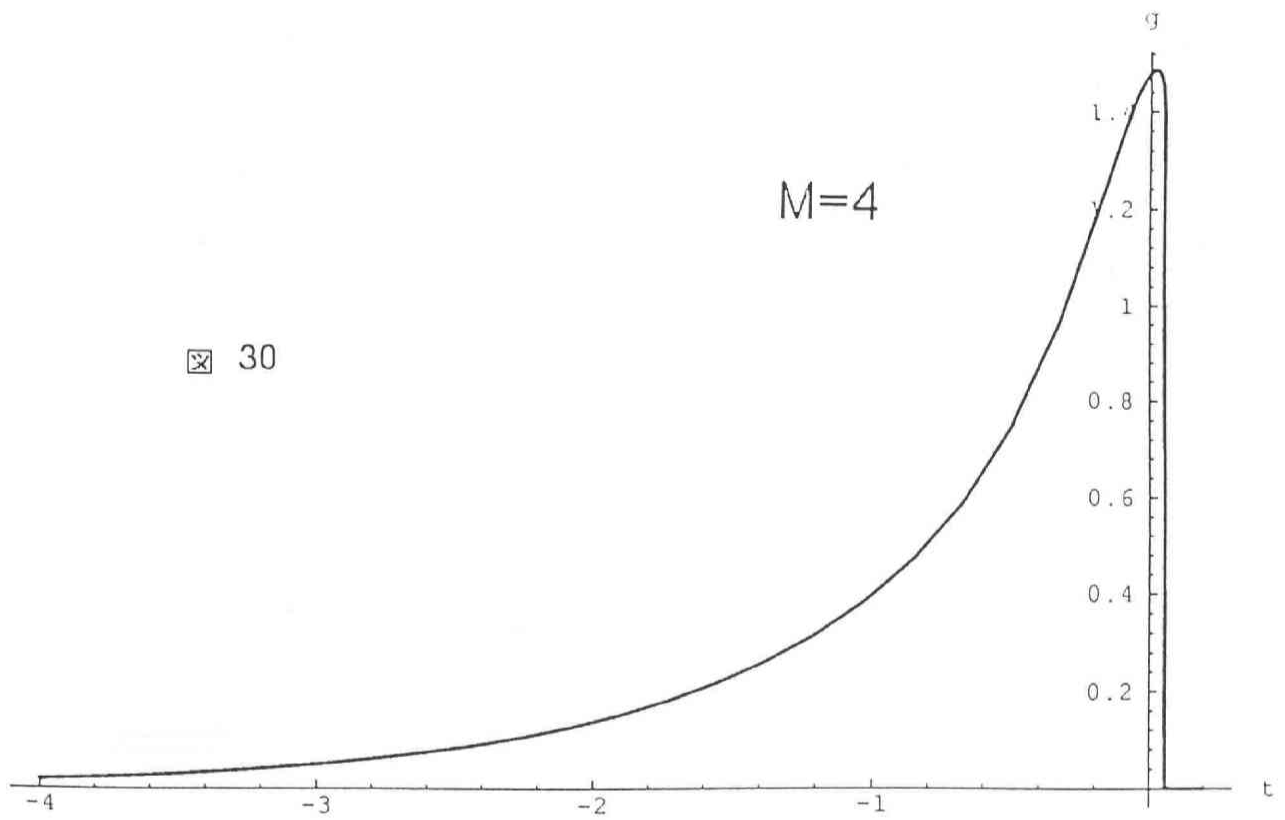




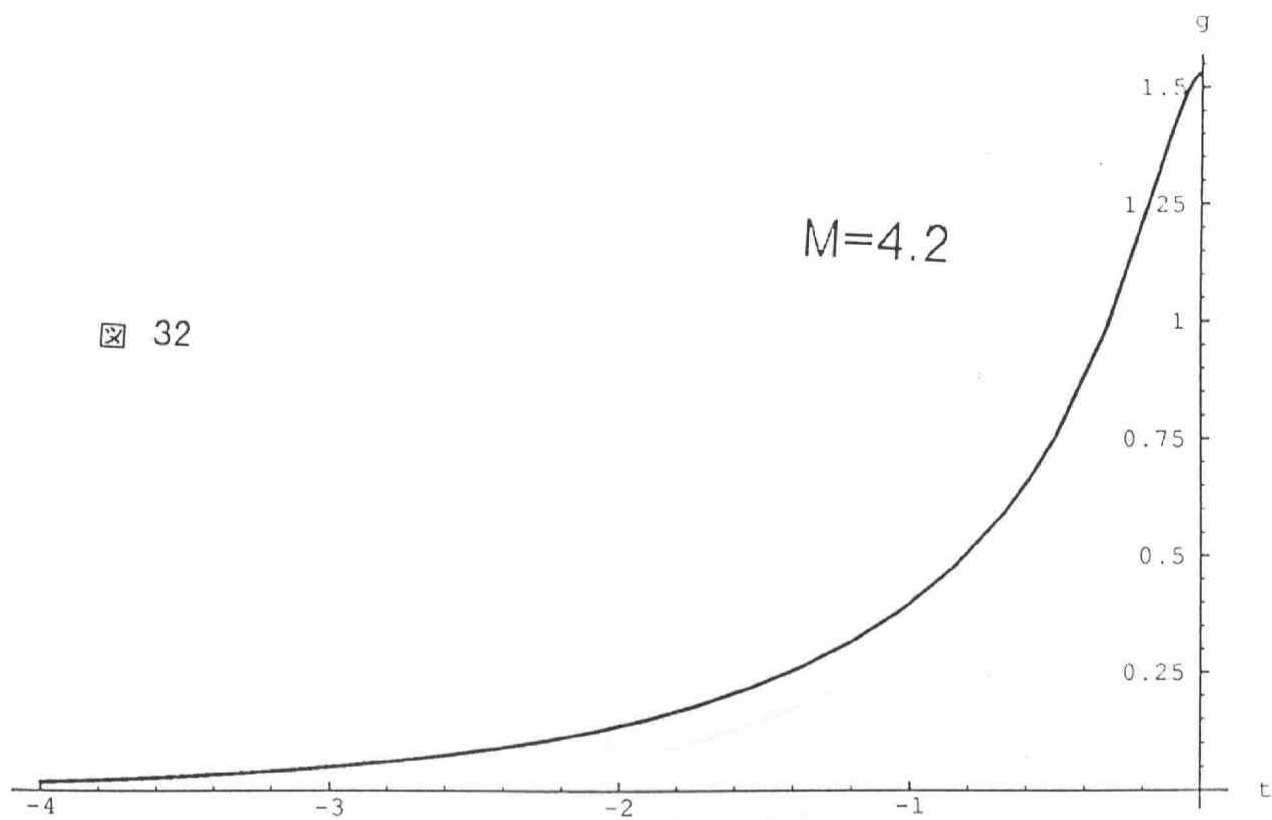




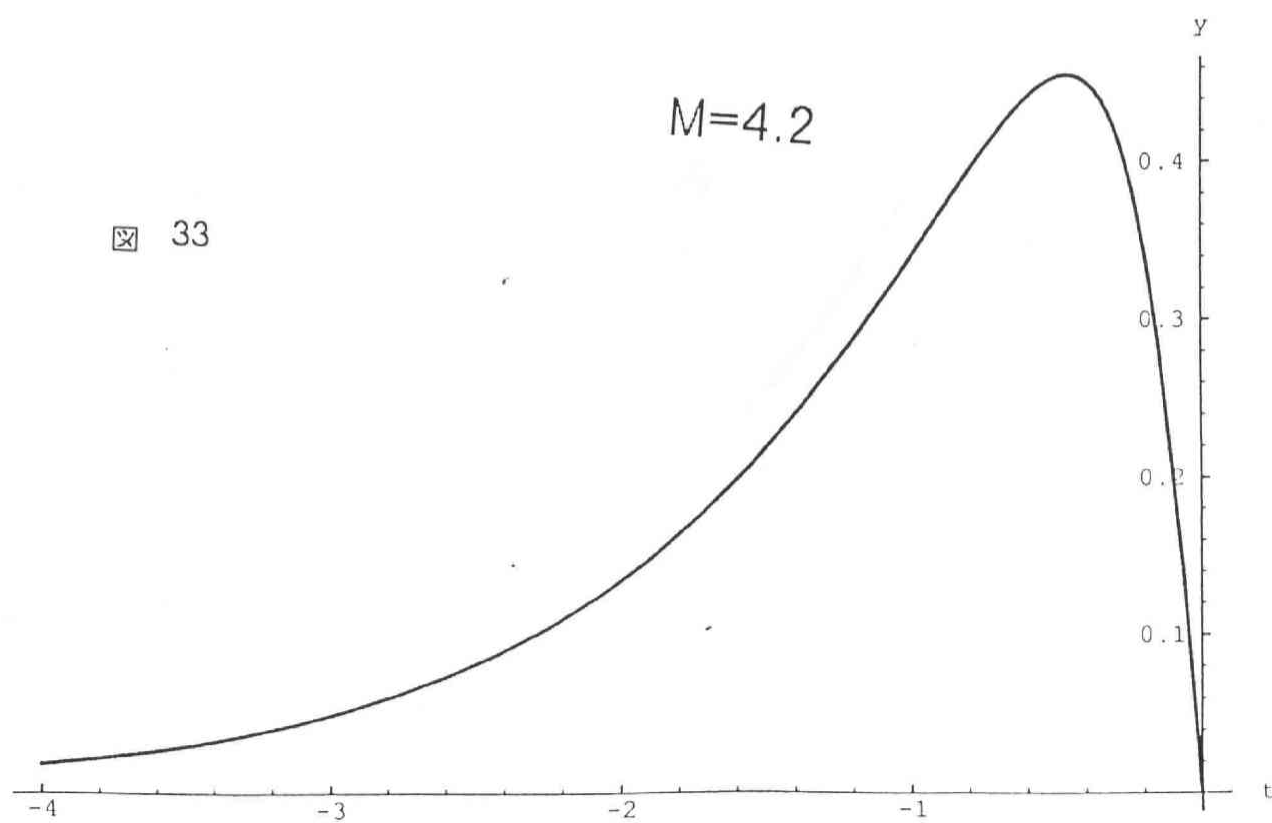


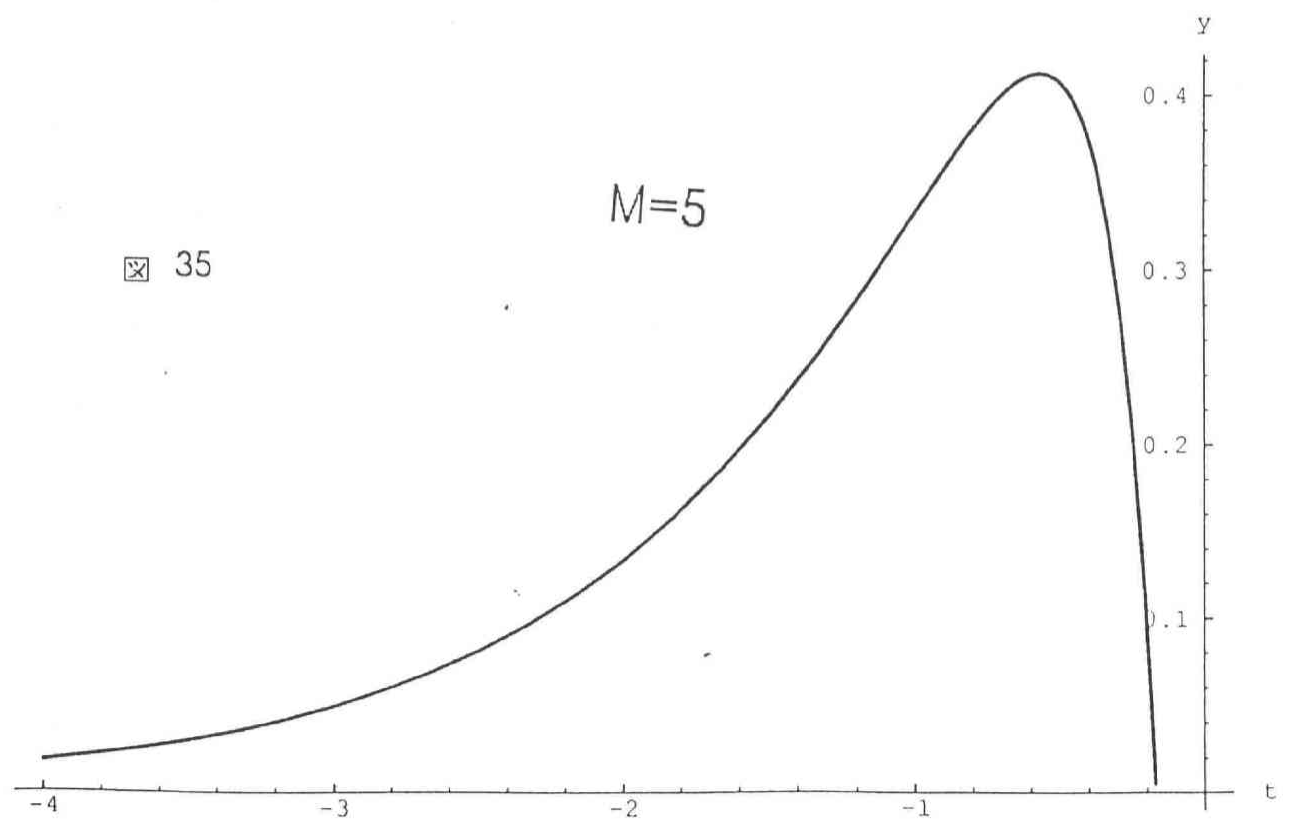
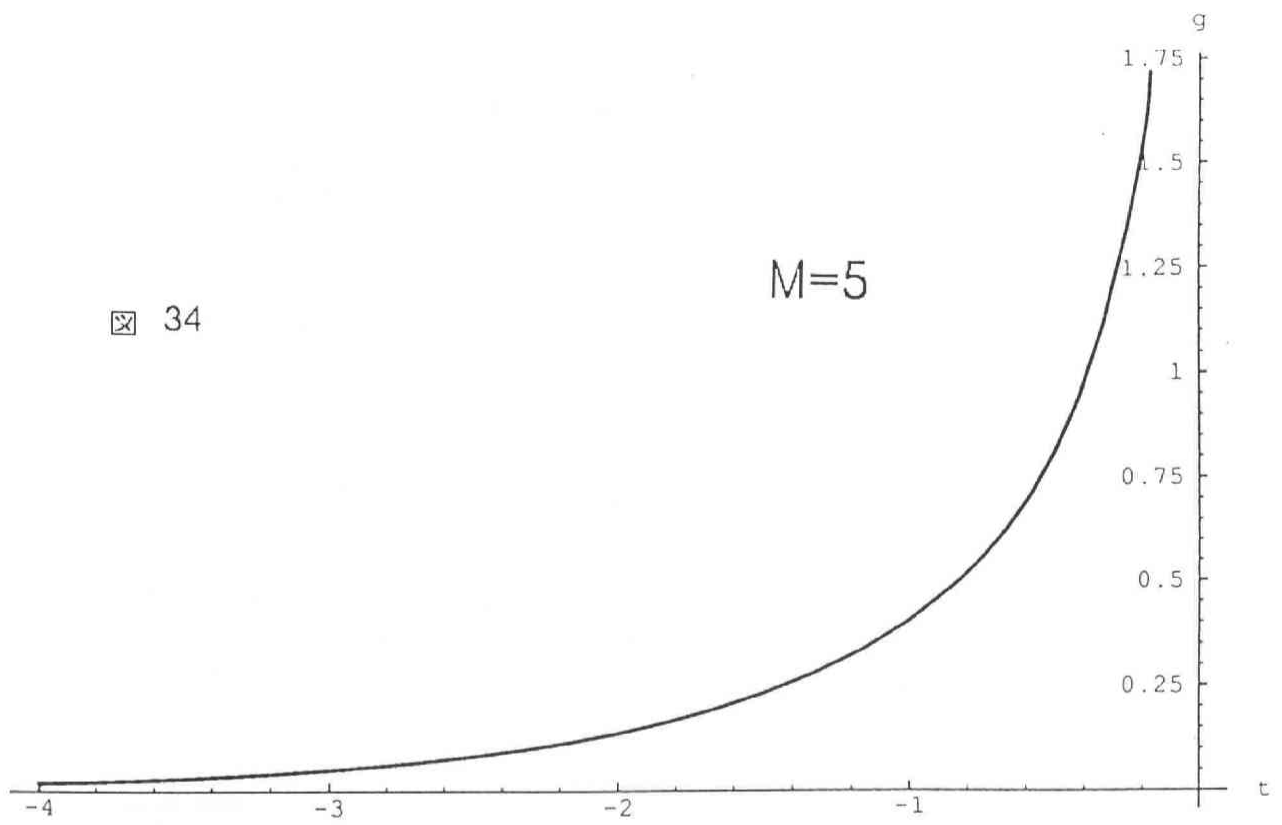


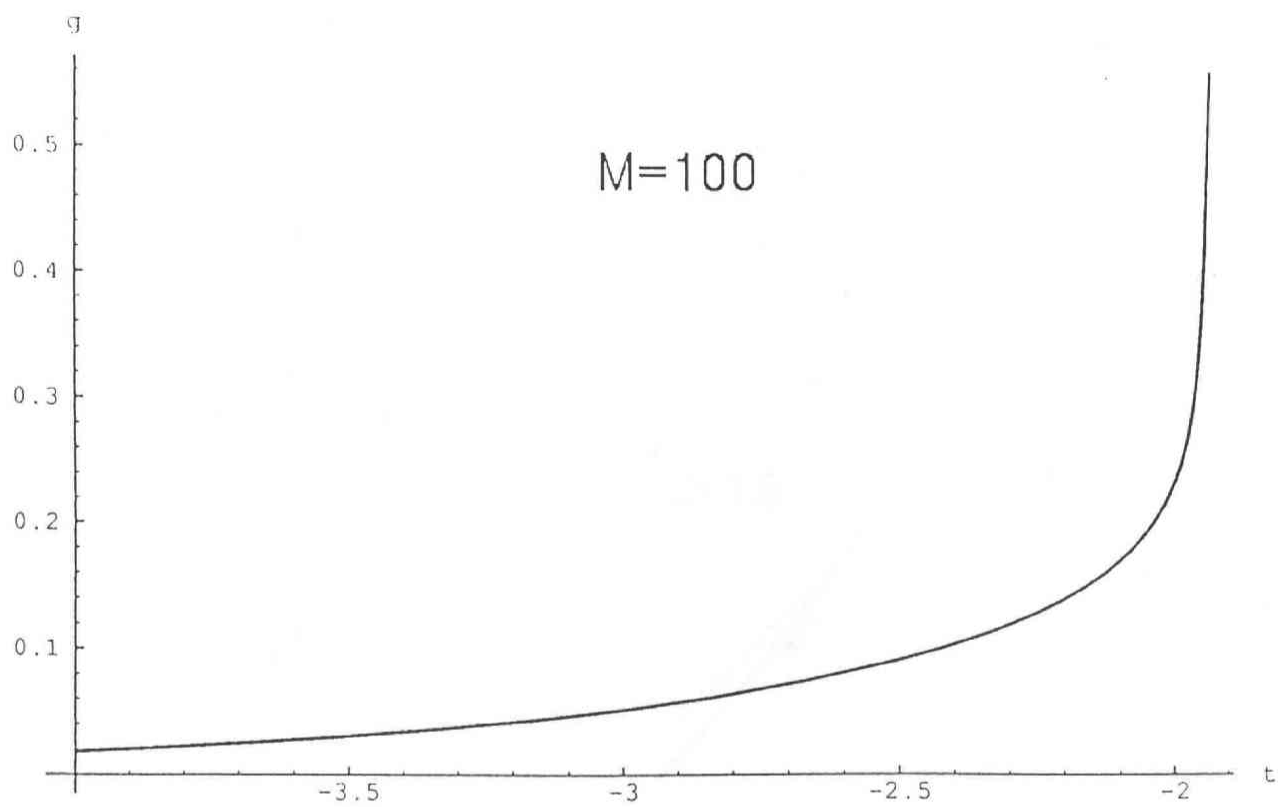
☒ 32



☒ 33

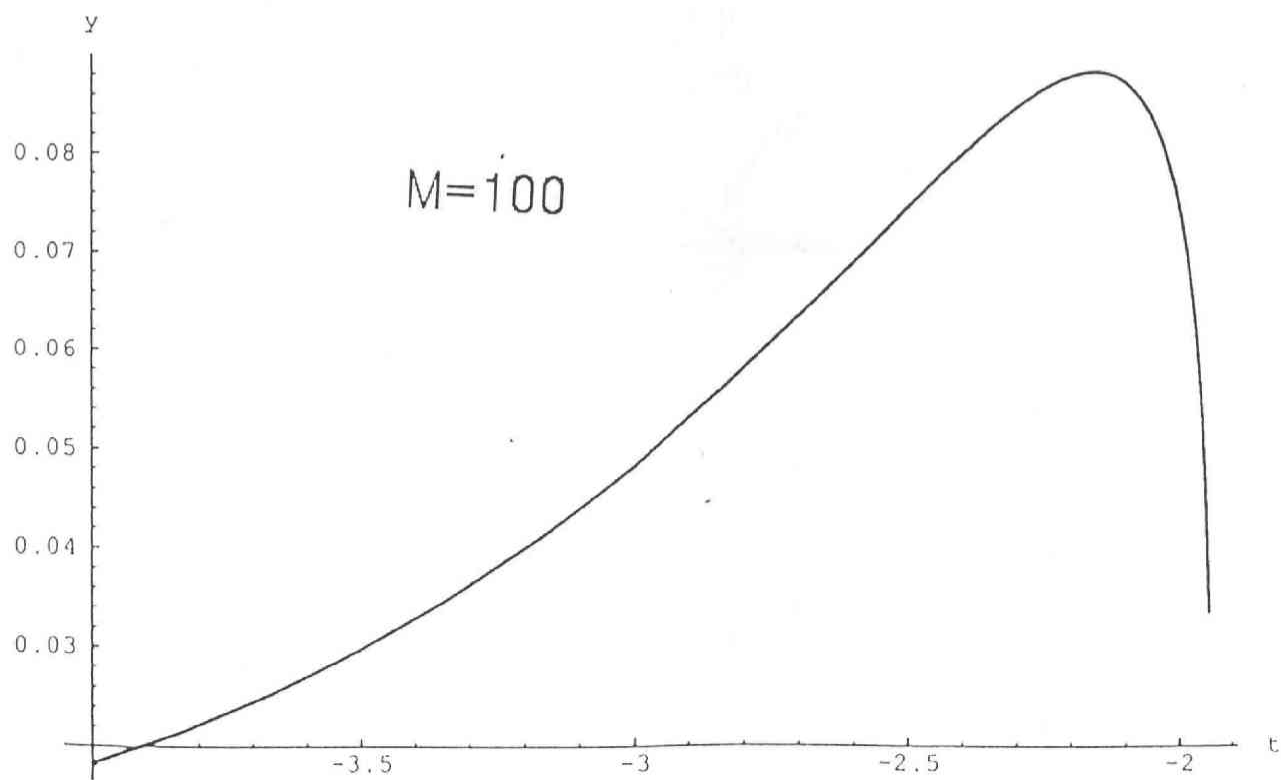


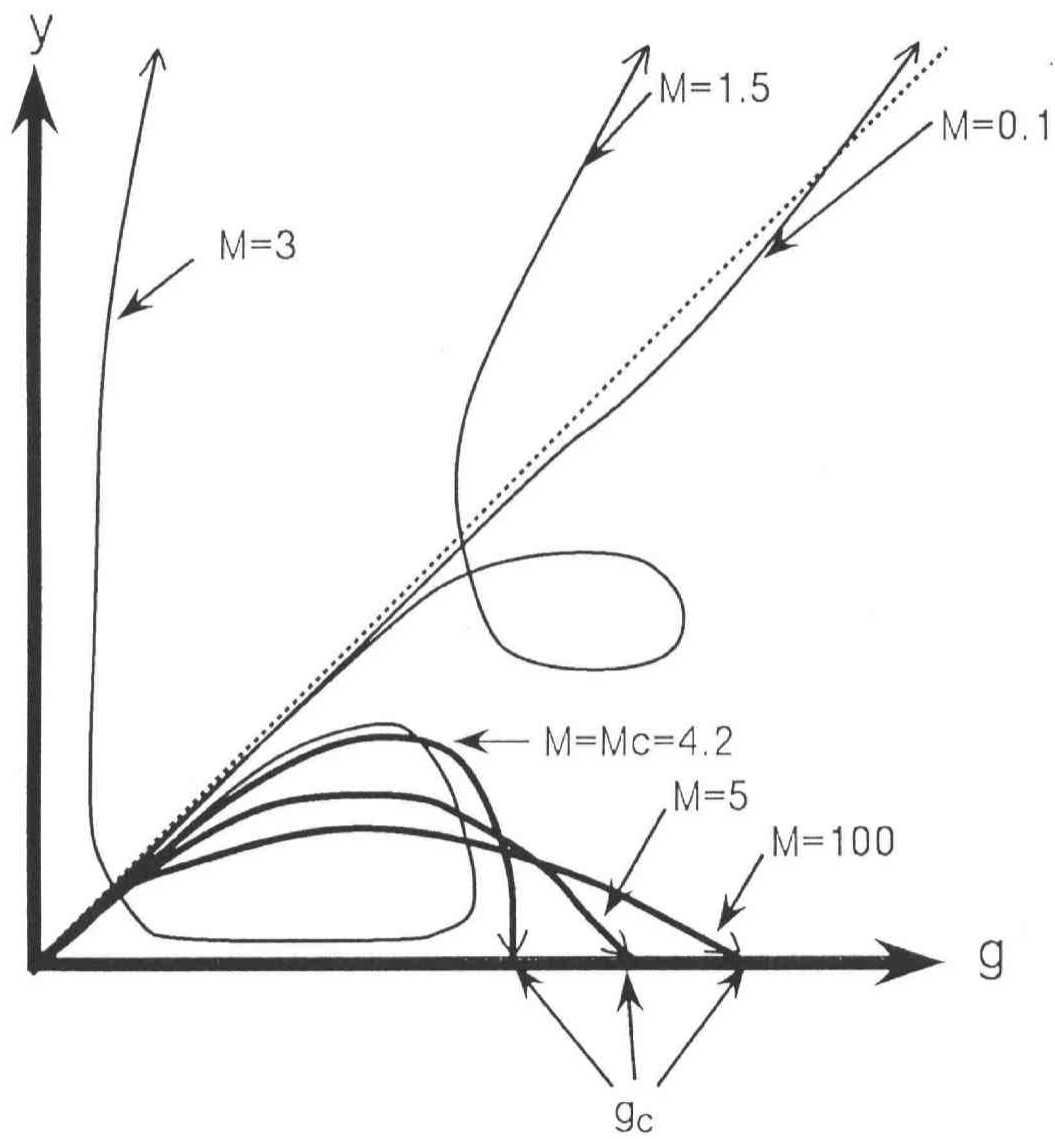




☒ 36

☒ 37





は  $M = 1.5$  とした時の解であり、 $g$ 、 $y$ がある期間減少する振る舞いが見えてくる。図 28、29 は  $M = 3$  とした場合で図 30、31 は  $M = 4$  とした場合である。 $g$ 、 $y$ が減少から再び増加に転ずる点での 2 階微分係数が極度に大きくなってきていることが観察される。そして図 32、33 での  $M = 4.2\kappa\lambda$  の場合では 2 階微分係数が発散する。 $M$ がこの値を越えると  $g$  は単調増加の振るまいに転じ、ある時刻  $t_c$  において  $g$  の微係数  $h$  が無限大になってしまう。 $g$  自身はある特定の値  $g_c$  に一致する。また  $t = t_c$  で  $y$  はちょうど 0 を切る。つまり  $t = t_c$  は特異点になっており、これを越えて方程式を解くことはできない。なお図 34、35 は  $M = 5$  の時の場合を表示し、図 36、37 は  $M = 100$  の場合を表示している。最後にこれらの結果の概略を  $(g, y)$  平面に投影したものを図 38 に示す。

$M < M_{cr}$  において  $t \rightarrow \infty$  では  $g$ 、 $y$ 、 $h$  が増大しており、対応する漸近形は方程式 (283) ~ (285) 式から次のように得られている。

$$g \sim \frac{\kappa\lambda}{M}(1-a)b_1e^{a\lambda t} + \frac{\kappa\lambda}{M}(2-a)b_2e^{(a-1)\lambda t} + o(e^{-a\lambda t}), \quad (298)$$

$$y \sim b_1e^{a\lambda t} + b_2e^{(a-1)\lambda t} + o(e^{-a\lambda t}), \quad (299)$$

$$h \sim \frac{\kappa\lambda^2}{M}a(1-a)b_1e^{a\lambda t} + \frac{\kappa\lambda^2}{M}(a-1)(2-a)b_2e^{(a-1)\lambda t} + o(e^{-a\lambda t}). \quad (300)$$

ここで  $a$ 、 $b_1$ 、 $b_2$  は定数であり、 $1/2 < a < 1$  に制限されている。この漸近形から計算される曲率は時間  $x^0$  とともに  $R \propto e^{-2a\lambda x^0}$  のように指数関数的に減衰しており、未来には平坦な空間が実現している。更にその未来には地平線も存在しない。このことは Reversed CGHS 理論における CGHS 仮説を  $M < M_{cr}$  において支持している。但し途中の過程において地平線構造が十分に完成していないうちから量子補正が効きだして蒸発している事に対しては注意をはらうべきである。また終状態での質量源では重力定数  $G_{eff}$  が消えており、重力的に透明になっている。この事はワームホールが輻射を出し、重力質量を完全に失ったと解釈できる。

$M > M_{cr}$  の場合、微分が特異になる時刻を  $t_c$  として漸近形は次のようになる。

$$g \sim g_c - (a' + 1)b'[\lambda(t_c - t)]^{a'} + o(t_c - t), \quad (301)$$

$$y \sim \frac{\lambda g_c}{\sqrt{1 - \frac{\kappa}{4}g_c^2}}(t_c - t) - \frac{b'}{\sqrt{1 - \frac{\kappa}{4}g_c^2}} \frac{3 + \frac{\kappa}{4}g_c^2}{1 + \frac{\kappa}{4}g_c^2} [\lambda(t_c - t)]^{a'+1}$$

$$+o((t_c - t)^2), \quad (302)$$

$$h \sim a'(a' + 1)b'[\lambda(t_c - t)]^{a'-1} + o(1) \quad (303)$$

ここで  $g_c$ 、 $a'$ 、 $b'$  は定数であり、 $0 < a' < 1$  である。

$g_c$  は質量  $M > M_{cr}$  を与えると定まる。 $g_c$  は方程式 (283) ~ (285) から

$$1 + \frac{\kappa}{2}g_c^2 + \frac{1}{16}(\kappa^2 - \frac{M^2}{\lambda^2})g_c^4 + \frac{\kappa M^2}{64\lambda^2}g_c^6 = 0 \quad (304)$$

を満たすことがわかる。この方程式が実正根を持たなくなる質量は数値的に求まっている  $M_{cr}$  とよく整合しており、先に述べた  $M_{cr} \sim 4.2\kappa\lambda$  を与える。

方程式 (304) は  $M_{cr} < M < \infty$  において 2 つの実正根をもつが、方程式 (283) ~ (285) を解くとその実正根のうち大きい方が  $g_c$  にあたることをわかる。図 39 には  $\lambda = 1$ 、 $\kappa = 1$  の場合に (304) 式の実正根のうち大きい方の根と、方程式 (283) ~ (285) を数値的に解いて得られる  $g_c$  とを  $M$  の関数としてプロットしたものである。両者はよく一致している。 $g_c$  は  $M_{cr}$  での値  $g_c \sim 1.5/\sqrt{\kappa}$  から  $M$  の増加とともに単調増加し、 $M \sim \infty$  において

$$g_c \sim \frac{2}{\sqrt{\kappa}} \quad (305)$$

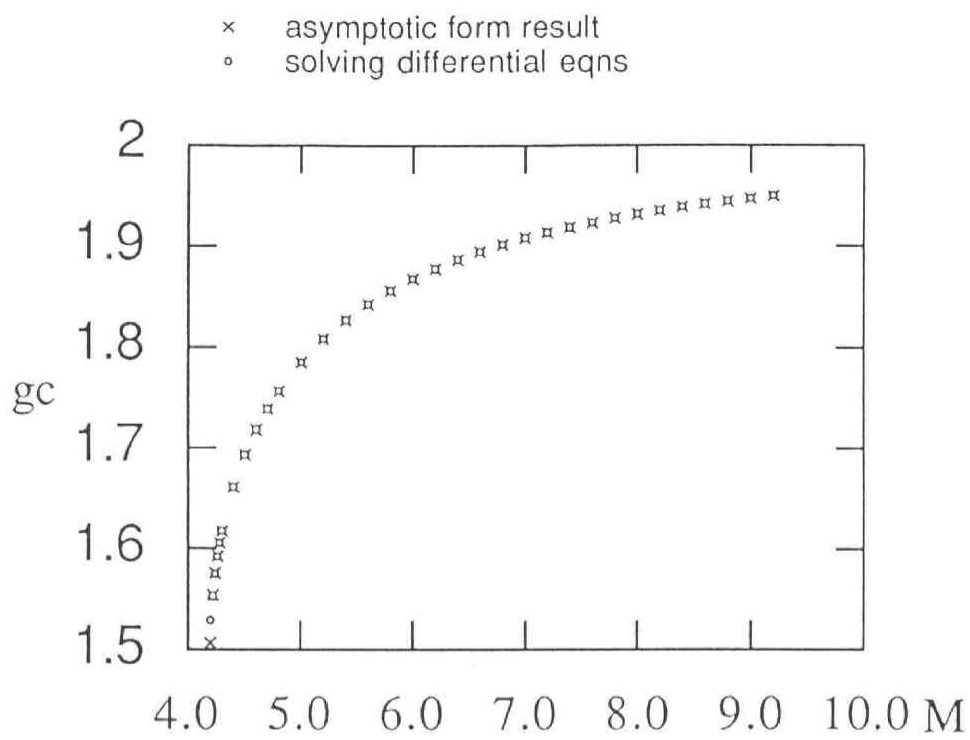
に漸近する。

また  $a'$  は方程式

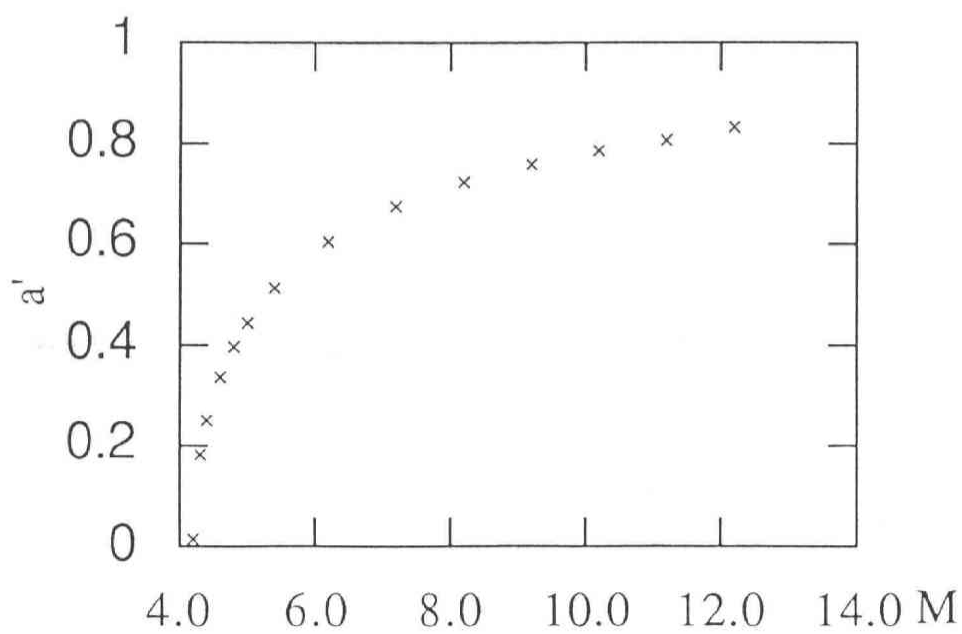
$$a'^2 - \frac{\kappa}{2}g_c^2 \frac{3 + \frac{\kappa}{4}g_c^2}{(1 + \frac{\kappa}{4}g_c^2)^2}a' - \frac{4 - \frac{3}{2}\kappa g_c^2 - \frac{1}{8}\kappa^2 g_c^4}{(1 + \frac{\kappa}{4}g_c^2)^2} = 0 \quad (306)$$

の根で、 $0 < a' < 1$  を満たすものである。このような根は  $M_{cr} < M < \infty$  において一意的に定まる。 $\lambda = 1$ 、 $\kappa = 1$  の場合に  $M$  を変化させた時の  $a'$  の振るまいを図 40 に示している。 $a'$  は 0 から単調増加して  $M \sim \infty$  において 1 に漸近する。

また漸近形 (301) ~ (303) をもとにして時空の因果構造を Penrose 図で表すと図 9 と同じものになる。 $x^- = t_c$ 、 $x^1 > 0$  と  $x^+ = t_c$ 、 $x^1 < 0$  とで特徴づけられるカusp 状

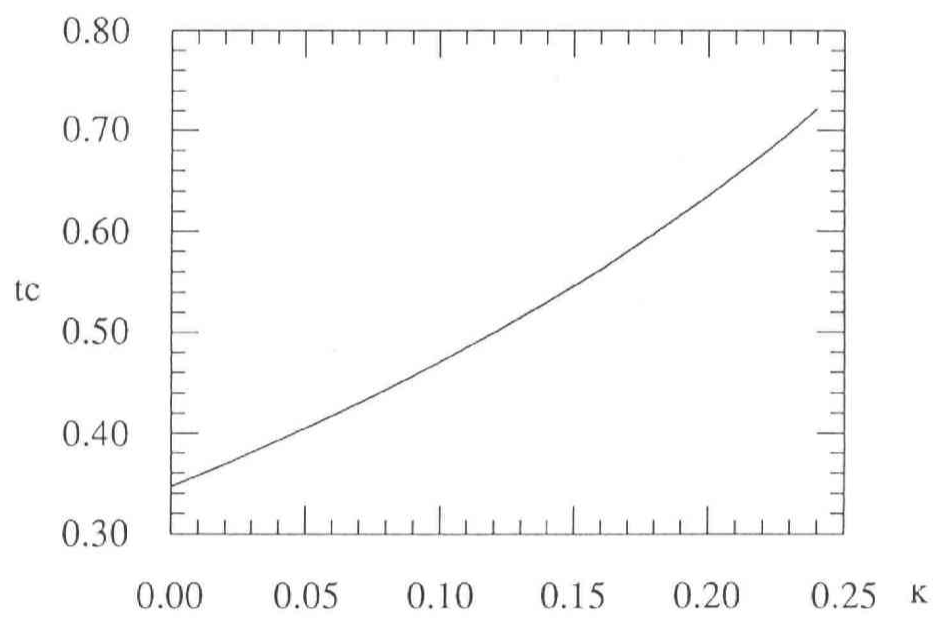


⊠ 39



⊠ 40





の境界近傍では曲率は消滅し、漸近的平坦領域である。 $x^1 > 0$  の領域において  $x^+$  を固定して  $x^-$  を  $t_c$  に漸近させると、(301) ~ (303) 式を使って、ディラトンと計量は

$$e^{-2\phi} \sim \left(\frac{1}{g_c^2} - \frac{\kappa}{4}\right) \frac{1 - e^{\lambda(t_c - x^+)}}{\lambda(t_c - x^-)}, \quad (307)$$

$$e^{2\rho} \sim \frac{1}{\lambda(t_c - x^-)(e^{\lambda(x^+ - t_c)} - 1)}, \quad (308)$$

という振る舞いを示す。これらに座標変換

$$\sigma^+ = \frac{1}{\lambda} \ln(1 - e^{\lambda(t_c - x^+)}), \quad (309)$$

$$\sigma^- = -\frac{1}{\lambda} \ln(\lambda(t_c - x^-)) \quad (310)$$

を施すと、計量はミンコフスキー計量  $ds^2 = -d\sigma^+ d\sigma^-$  になり、ディラトンは

$$\phi = -\lambda\sigma^0 - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{g_c^2} - \frac{\kappa}{4}\right) \quad (311)$$

と書ける。これはちょうど Linear Dilaton 真空になっているが、重要なのは未来に向かって重力定数が弱くなっていく振る舞いを示すことである。これはちょうど過去における真空解を時間反転させたものに対応している。この領域はワームホールの輻射に対する反作用の影響で新たに生じた領域である。

$x^- = t_c$ ,  $x^1 > 0$  近傍と  $x^+ = t_c$ ,  $x^1 < 0$  近傍が漸近的平坦な空間であることから、 $x^- = t_c$ ,  $x^1 < 0$  と  $x^+ = t_c$ ,  $x^1 > 0$  は今の場合の地平線である。反作用を考慮した時のこの地平線は古典的ワームホールの地平線の位置より後退していることも確認できる。図 41 は質量を  $M = 1$ 、宇宙項を  $\lambda = 1$  にして  $\kappa$  を変えていったときの地平線の位置  $t_c$  の振る舞いを示している。 $\kappa = 0$  とした時は古典的な地平線の位置  $x_H = -\frac{1}{2\lambda} \ln \frac{M}{2\lambda} \sim 0.347$  に一致している。 $\kappa$  を増加させて量子効果を強めていくと  $t_c$  は単調に増加し、地平線はより未来に形成されるようになり、 $M = 1 = M_{cr}$  となる  $\kappa \sim 0.24$  を越えると唐突に  $t_c = \infty$  になり、地平線は存在しなくなる。

$M > M_{cr}$  では地平線は残るが、反作用の効果で質量源近傍の様子も大幅に変わる。古典的ワームホールにおいては質量源は有限な固有時間で境界点  $(x^+, x^-) = (x_H, x_H)$  に到達した。しかし反作用を考慮すると  $M > M_{cr}$  では前述したようにその地点は地平線の交点ではなくなり、境界点は  $(x^+, x^-) = (t_c, t_c)$  へ後退する。そしてその境界

点に近づく固有時間は発散し、質量源はその地点に到達できないことがわかる。固有時間は

$$\tau = \int^{t_c} e^{\bar{\rho}} dx^0 = \sqrt{1 - \frac{\kappa}{4} g_c^2} \int^{t_c} \frac{dx^0}{\lambda(t_c - x^0)} \quad (312)$$

と評価され、対数的に発散している。また古典的ワームホールでは曲率はデルタ関数に比例する項

$$\hat{R} = 2M e^{2\lambda x^0} \delta(x^1) \quad (313)$$

しか存在しなかったが、反作用を取り入れるとその項は

$$\hat{R} = \frac{2\pi g_c^2}{(1 + \frac{\kappa}{4} g_c^2)^2} \delta(e^{\bar{\rho}} x^1) \quad (314)$$

に置きかわる。ここでデルタ関数の引数を固有長さ  $e^{\bar{\rho}} x^1$  にした表式を採用している。また量子効果を考慮すると曲率のなめらかな成分

$$\tilde{R}(x^0 \sim t_c, x^1 = 0) = -\frac{4\lambda^2}{1 + \frac{\kappa}{4} g_c^2} < 0 \quad (315)$$

も生じる。無限大の固有時間間隔において、質量源は (315) 式の負の一定背景曲率の空間にとどまる。このことから質量源近傍はアンチドジッター空間として急膨張していることになる。実際膨張のスケール因子  $a_s = e^{\bar{\rho}}$  は固有時間に関して

$$a_s \sim \sqrt{1 - \frac{\kappa}{4} g_c^2} \exp\left[\frac{\lambda \tau}{\sqrt{1 - \frac{\kappa}{4} g_c^2}}\right] \quad (316)$$

という振る舞いで増大し続ける。

このように Reversed CGHS 理論において真空分極が地平線を持った時空へ及ぼす反作用を取り入れた議論をすると、反作用を考慮しなかった議論での結論と描像を大きく変更する結果を得る。

## 6 まとめ

本論では Reversed CGHS 重力理論に現われるワームホール上の物質場の量子効果を議論した。

まず古典的 Reversed CGHS 理論において局在した質量源のつくる時空を調べると曲率特異点をもたないが2つの事象の地平線を伴ったワームホールが形成されることを示した。

またそのワームホール上で massless 自由場の正準量子化を行なった。そして過去に真空状態に設定しても地平線の完成した未来には輻射が励起され、かつそのエネルギースペクトラムは温度  $T_H = \lambda/\pi$  のプランク分布をしていることを示した。これはワームホールからの Hawking 輻射である。

また量子効果がワームホール時空へ及ぼす反作用を議論した。CGHS 理論におけるブラックホールに対する反作用の解析と異なり、Reversed CGHS 理論では量子効果が誘導する曲率特異点が存在しない。従って裸の特異点も現われないために、反作用を考慮した時間発展を終状態まで議論することが可能となった。

ワームホールの質量には臨界質量  $M_{cr} \sim 4.2\kappa\lambda$  が存在し、これより軽い質量のワームホールは反作用の効果で完全蒸発することを示した。その時ワームホールから放射される輻射は質量源近傍に輻射自身が生みだした曲率を通して重力自由度のディラトン場の励起に転換され、無限遠方ではフラックスが観測されないことも示した。

ワームホール質量が  $M_{cr}$  より大きい場合にはワームホールは完全には蒸発しきれず、地平線は未来において形成されることも示された。但し地平線は古典論で予言される位置よりも後退した所に形成される。

また質量が  $M_{cr}$  より大きい時、未来の領域に漸近的平坦でかつ時間とともに重力定数が消えていく新たな領域が形成されていることが示された。これは反作用を切った場合には現われなかった領域でワームホールの輻射の反作用の効果で初めて産みだされた領域である。

またワームホールからの輻射は空間無限遠方領域では観測されないことも明らかにされた。そして例えば質量を大きくして半古典的描像をよく成り立たせようとしても、熱的な Hawking 輻射はある期間質量源近傍で観測されるのみであることも述べた。この理

論では Hawking 輻射は反作用を考慮すると一時的で局所的な現象であると結論される。

これらの結論は量子効果が時空へ及ぼす反作用が根本的な働きをしえること意味する。4次元ブラックホールの終状態においても Hawking の半古典的解析からの描像はかなり変更を受けるものと予想される。

将来の課題としては、この2次元ワームホールにおいて Information Loss 問題がどのように解決されているかを解析することがあげられる。この解析は4次元ブラックホールでの Information Loss 問題に対しても重要な示唆を与えるであろう。

## 謝辞

この論文の作成にあたり協力してくださった全ての皆様に感謝致します。特に、吉村太彦先生にはその最初から共同研究者としての惜しみない協力と指導を頂きました。また、江沢潤一先生、はじめ素粒子論研究室のスタッフの皆様には有益な助言を頂きました。また田宮吉雄君と鈴木芳春君には度々2次元重力理論について議論をして頂き、大変有意義でした。そして、様々な点で助力を頂いた同研究室のその他の院生及び秘書の皆様には感謝の意を表したいと思います。

ありがとうございました。

## A 補遺: Polyakov 作用の導出

この補遺では、2次元 massless 場の経路積分を Heat Kernel regularization と Polyakov の積分測度で定義した場合、結果として trace anomaly を与える Polyakov 作用が得られることを示す。まず Euclidean 計量において形式的に経路積分を次のように書く。

$$Z[g] = \int D_g f e^{-\frac{1}{4\pi} \int d^2x \sqrt{g} (\nabla f)^2}. \quad (317)$$

式(317)において積分測度を定義する必要があるが、ここではそれは計量だけに依っていて、ディラトンには依存しない場合を考える。測度を構成するために  $f$  の汎関数空間内の2点  $f_1$  と  $f_1 + \delta f$  の間の距離を次のように定義する。

$$\langle \delta f | \delta f \rangle = \int d^2x \sqrt{g} (\delta f)^2. \quad (318)$$

これは汎関数空間での計量  $dS^2 = G_{ij}(\delta f)_i (\delta f)_j$  をいれたことになっている。また2次元時空での一般座標変換に対しても式(318)は不変である。この計量にたいして自然な体積要素は  $\sqrt{\text{Det} G_{ij}} \prod_i (\delta f)_i$  である。以降これを経路積分の測度として使うことにする。

次に微小コンフォーマル変換でつながっている2次元計量  $g_{ab}$  と  $\tilde{g}_{ab}$  を考える。

$$\tilde{g}_{ab} = e^{\delta\sigma} g_{ab}. \quad (319)$$

(ここで $\sigma(x)$ は無関数の関数である。)この時各々の汎関数空間の体積要素の比は、

$$e^{J[\delta\sigma, \tilde{g}]} = \frac{D_{\tilde{g}}f}{D_g f} = \sqrt{\text{Det} e^{\delta\sigma}}. \quad (320)$$

となる。これを評価するために、次の汎関数空間の計量 (318) に対して自然な座標表示用の基底を使う。

$$|x_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{g}} \delta^{(2)}(x - x_0), \quad (321)$$

$$I = \int d^2x \sqrt{g} |x\rangle \langle x|. \quad (322)$$

すると

$$J[\delta\sigma, \tilde{g}] = \frac{1}{2} \text{Tr}[\delta\sigma] \quad (323)$$

$$= \frac{1}{2} \int d^2x \sqrt{g} \langle x | \delta\sigma(x) | x \rangle \quad (324)$$

$$= \frac{1}{2} \int d^2x \sqrt{g} \langle x | x \rangle \delta\sigma(x). \quad (325)$$

と計算されるが $\langle x | x \rangle \sim \delta^{(2)}(0)$ が質量の次元での2次発散を含んでいる。そこで Heat Kernel 法で正則化する。

$$J[\delta\sigma, \tilde{g}] \rightarrow \frac{1}{2} \int d^2x \sqrt{g} \langle x | e^{\Delta_g/\Lambda^2} | x \rangle \delta\sigma(x). \quad (326)$$

ここで $\Delta_g = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_a (g^{ab} \sqrt{g} \partial_b)$ は2次元でのラプラシアンであり、 $\Lambda$ は cutoff である。 $\langle x | e^{\Delta_g/\Lambda^2} | x \rangle$ は $1/\Lambda^2$ を時間変数とした曲った空間での拡散方程式における積分核であり、 $\Lambda \sim \infty$ の時には

$$\langle x | e^{\Delta_g/\Lambda^2} | x \rangle \sim \text{const.} \Lambda^2 + \frac{1}{24\pi} R + o\left(\frac{1}{\Lambda}\right) \quad (327)$$

という評価ができる。第1項目の2次発散は宇宙項であり、これはつりあう counter 項を最初に用意しておいて、消去する。第2項目がトレースアノマリーに關与する項である。結果として

$$J = \frac{1}{48\pi} \int d^2x \sqrt{g} R \delta\sigma \quad (328)$$

となる。この式 (328) を使うと、 $\sigma$ の大きさが有限の場合 ( $\tilde{g}_{ab} = e^\sigma g_{ab}$ ) の  $J$  も次のように評価できる。

$$J[\sigma, \tilde{g}] = \int_0^1 \frac{1}{48\pi} \int d^2x \sqrt{\tilde{g}} \tilde{R} \sigma dt \quad (329)$$

$$= \frac{1}{48\pi} \int d^2x \sqrt{g} \left( \frac{1}{2} (\nabla\sigma)^2 + R\sigma \right). \quad (330)$$

式 (330) から、経路積分 (317) に対して

$$Z[e^\sigma g] = z[g] e^{\frac{1}{48\pi} \int d^2x \sqrt{g} (\frac{1}{2}(\nabla\sigma)^2 + R\sigma)} \quad (331)$$

という関係式が得られる。2次元では任意の計量を適当な座標変換で  $g_{ab} = e^{2\rho} \delta_{ab}$  というコンフォーマルゲージにもっていける。従って任意の計量に対しての分配関数 (317) は

$$Z[e^{2\rho} \delta_{ab}] = Z[\delta_{ab}] e^{-S_{polyakov}}, \quad (332)$$

$$S_{polyakov} = -\frac{1}{24\pi} \int d^2x (\partial\rho)^2 \quad (333)$$

となる。(333) 式は Polyakov 作用:

$$S_{polyakov} = -\frac{1}{96\pi} \int d^2x \sqrt{g} R \frac{1}{\nabla^2} R \quad (334)$$

をコンフォーマルゲージで書いたものになっている。

なお以上の導出法は川合光氏による集中講義のノートからの引用である [5]。

ここで注意すべきことはディラトンが理論にはいつている時には経路積分の測度や regulator にその依存性がない理由がないということである。例えば測度を定義する際に用いた汎関数空間内の内積 (318) をディラトン依存性を入れて、

$$\langle \delta f | \delta f \rangle = \int d^2x \sqrt{g} e^{-\alpha\phi} (\delta f)^2. \quad (335)$$

とすると有効作用は式 (333) から

$$S_{eff} = -\frac{1}{24\pi} \int d^2x [(\partial\rho)^2 - \alpha\phi \nabla^2 \rho + \frac{1}{4}\alpha^2 (\nabla\phi)^2] \quad (336)$$

と置きかわり、ディラトンの依存性が現われる。

## 参考文献

- [1] S.W.Hawking, Commun.Math.Phys.43,199(1975).
- [2] D.N.Page, Phys.Rev.D14,3260(1976).
- [3] G.W.Gibbons, Commun.Math.Phys.44,245(1975).



- [4] K.Sato, H.Kodama, M.Sasaki and K.Maeda,  
Phys.Lett.108B,108(1982);and references therein.
- [5] H.Kawai, Lecture on 2 dim. Quantum Gravity, talked at Tohoku University.
- [6] P.C.W.Davies, S.A.Fulling, S.M.Christensen and T.S.Bunch,  
Ann.Phys.(NY)109,108(1977).
- [7] T.S.Bunch and P.C.W.Davies,  
Proc.R.Soc.London.A357,381(1977).;  
P.Chandelas and D.Deutsch,Proc.R.Soc.London.A354,79(1977);  
A362,251(1978);T.S.Bunch, Phys.Rev.D18,1844(1978).
- [8] P.C.W.Davies, Proc.R.Soc.London.A351,129(1976);  
P.C.W.Davies, S.A.Fulling and W.G.Unruh,  
Phys.Rev.D13,2720(1976);W.A.Hiscock, Phys.Rev.D15,3054(1977);  
Phys.Rev.D16,2673(1977);Phys.Rev.D21.2063(1980).
- [9] G.'t Hooft, Nucl.Phys.B256,727(1985);  
D.N.Page, Phys.Rev.Lett.44,301(1980).
- [10] T.Banks, A.Dabholkar, M.R.Douglas and M.O'Loughlin,  
Phys.Rev.D45,3607(1992);S.B.Giddings, Phys.Rev.D46, 1347(1992).
- [11] F.Dyson, unpublished(1976).
- [12] C.G.Callan, S.B.Giddings, J.A.Harvey and A.Strominger,  
Phys.Rev.D45,R1005(1992).
- [13] J.G.Russo, L.Susskind and L.Thorlacius,  
Phys.Lett.B292,13(1992).
- [14] S.W. Hawking, Phys.Rev.Lett.69,  
406(1992).;B.Birner, S.B.Giddings, J.A.Harvey and A.Strominger,  
Phys.Rev.D46,638(1992);L.Susskind and L.Thorlacius,  
Nucl.Phys.B382,123(1991).

- [15] D.A.Lowe, Phys.Rev.D47,2446(1993);  
T.Piran and A.Strominger, NSF-ITP-93-36.
- [16] J.G.Russo, L.Susskind and L.Thorlacius,  
Phys.Rev.D46,3444(1992).
- [17] A.Bilal and C.Callan, Nucl.Phys.B394,73,(1993).
- [18] S.P.de Alwis, Phys.Lett.B289,278(1991), Phys.Lett.B300,330(1993).
- [19] K.Hamada, Phys.Lett.B300,322(1993).
- [20] S.B.Giddings and W.M.Nelson, Phys.Rev.D46,2486(1992).
- [21] M.Yoshimura, Phys.Rev.D47,5389(1993).
- [22] M.Hotta, Y.Suzuki, Y.Tamiya and M.Yoshimura,  
Phys.Rev.D48,707(1993).
- [23] M.Hotta, Y.Suzuki, Y.Tamiya and M.Yoshimura,  
TU-93-431, April(1993) to appear in P.T.P..
- [24] M.Hotta and M.Yoshimura, TU-93-437, June(1993).
- [25] M.Hotta and M.Yoshimura, TU-93-440, July(1993).